NOM : Corrigé Date : Année 2010-2011
PRENOM : Groupe : Semestre 2

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 1
Modèle de Lotka-Volterra

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

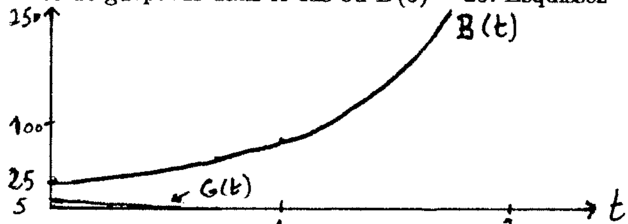
L'étude de l'évolution en interaction d'une population de babouins $B(t)$ (les proies) et d'une population de guépards $G(t)$ (les prédateurs) a conduit au modèle dynamique de Lotka-Volterra suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} B'(t) & = & 1.2B(t) - 0.2B(t)G(t) \\ G'(t) & = & 0.1B(t)G(t) - 5G(t) \end{array} \right. \tag{1}$$

On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, il y a 25 babouins et 5 guépards (donc $B(0) = 25$ et $G(0) = 5$) et on s'interroge pour savoir comment, lorsque t augmente, les effectifs de ces deux populations vont évoluer.

1. Calculer la dynamique des babouins en l'absence de guépards dans le cas où $B(0) = 25$. Esquissez le graphe de cette solution pour $0 \leq t \leq 2$.

L'équation s'écrit $B'(t) = 1,2B(t)$
Donc sa solution telle que $B(0) = 25$
est $\boxed{B(t) = 25e^{1,2t}}$ (modèle malthusien)
On a une croissance exponentielle de la pop. de babouins. $B(2) \simeq 275$

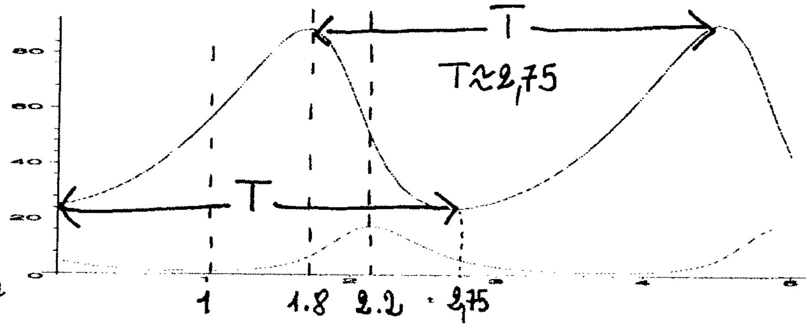


2. De même, calculer la dynamique des guépards en l'absence de babouins si l'on suppose $G(0) = 5$. Ajouter son graphe au tracé précédent.

L'équation s'écrit $G'(t) = -5G(t)$, donc sa solution telle que $G(0) = 5$ est $\boxed{G(t) = 5e^{-5t}}$ (modèle malthusien). On a une décroissance exponentielle de la population de guépards (conduisant à son extinction rapide). C'est le modèle d'une population privée de ressources. $G(0,4) \simeq 0,7 < 1$

3. On a représenté sur la figure suivante l'évolution au cours du temps des deux populations pour $0 \leq t \leq 5$. Les deux fonctions $B(t)$ et $G(t)$ sont des fonctions périodiques de période T. Quelle est la valeur approximative de T ?

On trouve à peu près $T = 2,75$ soit cherchant T tel que $B(T) = B(0) = 25$ soit en mesurant la distance entre les 2 sommets.



4. Expliquer la dynamique de chacune des deux populations de babouins et de guépards sur chacun des trois intervalles $[0, 1]$, $[1, 1.8]$ et $[1.8, 2.2]$ successivement en précisant leurs interactions.

- Sur $[0,1]$, il y a très peu de guépards, la population de babouins augmente vite, celle des guépards diminue.
- Sur $[1, 1.8]$, il y a suffisamment de babouins donc la population de guépards peut augmenter mais cela va finir par stopper la croissance des babouins.
- Sur $[1.8 ; 2.2]$ l'importance du nombre de guépards conduit à la diminution de la population de babouins.

5. On a calculé une solution approchée du système d'équations différentielles (1) et on a trouvé les valeurs suivantes :

t	0	0.25	0.5	1	1.5	1.75	2	2.25	2.75
$B(t)$	25	28	34	54	83	88	67	38	24
$G(t)$	5	3	2	1	3	7	16	16	6
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9

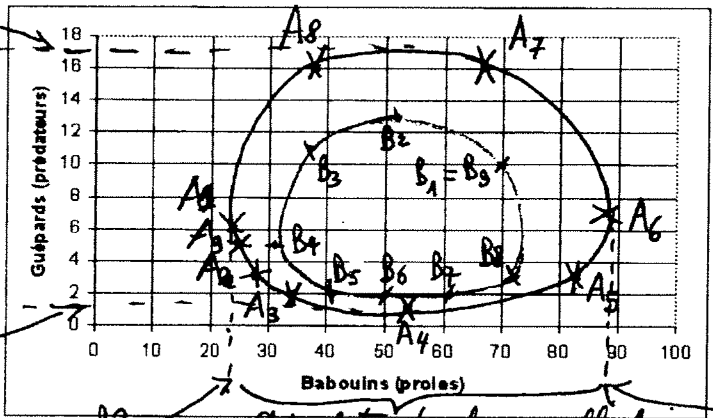
$A_9 \simeq A_1$

On désigne par A_0 le point de coordonnées (25 ;5), par A_1 celui de coordonnées (28 ;3), et ainsi de suite jusqu'à A_6. Placer les 9 points sur la figure ci dessous puis en deduire l'allure de la trajectoire du système (1) issue du point A_0.

17

amplitude des oscillations des guépards

1



23

amplitude des oscillations des babouins

88 ou 89

6. Les populations de babouins et de guépards oscillent entre deux valeurs minimale et maximale. Déterminer approximativement ces deux valeurs extrêmes pour chacune des deux populations.

Sur le dessin, on voit que les babouins oscillent entre 23 et 88 ou 89 et les guépards entre 1 et 17 (environ).

7. Reprendre les deux questions précédentes avec une nouvelle condition initiale de 70 babouins et 10 guépards :

t	0	0.25	0.5	1	1.5	1.75	2	2.25	2.75
$B(t)$	70	52	37	31	41	50	61	72	70
$G(t)$	10	13	11	5	2	2	2	3	10
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9

Sur le dessin, on voit que les babouins oscillent entre 31 et 72 ou 73 et les guépards entre 2 et 13 (environ).

8. Tracer, sur un même dessin, les graphes des fonctions $B(t)$ et $G(t)$ de condition initiale $B(0) = 70$ et $G(0) = 10$.