NOM : Corrigé
PRENOM :

Date : 20-24 septembre 2010 .

Groupe : .

**Mathématiques Appliquées à la Biologie : Feuille-réponses du TD 2**
**Distribution stationnaire d'une chaine de Markov**

**On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.**

**Exercice 1.** : On reprend la chaîne de Markov d'espace d'états $S = \{h, f, a\}$, pour *herbe*, *forêt*, et *arbustes*, modélisant l'évolution de la végétation d'un territoire laissé en friche, qui illustrait le premier cours.

1. Rappeler la matrice de transition correspondante et indiquer ce que vaut $P(X_t = h/X_{t-1} = f)$ :

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} h & f & a \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}05 & 0{,}45 \\ 0 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} h \\ f \\ a \end{array}$$

2. Calculer l'image $\pi_1$ de la distribution initiale $\pi_0 = (0.5\ ; 0.3\ ; 0.2)$ en explicitant vos calculs.

$$\pi_1 = \pi_0 \times \mathbb{P} = (0{,}5\ ;\ 0{,}3\ ;\ 0{,}2) \times \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}05 & 0{,}45 \\ 0 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$= (0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot 0 + 0{,}2 \cdot 0{,}1\ ;\ 0{,}5 \cdot 0{,}05 + 0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 0{,}4\ ;\ 0{,}5 \cdot 0{,}45 + 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}5)$$

$$= (0{,}27\ ;\ 0{,}375\ ;\ 0{,}355)$$

3. Compléter, en explicitant vos calculs, les coefficients manquants de la matrice $\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.295 & 0.25 & 0.455 \\ 0{,}01 & 0.85 & 0{,}14 \\ 0{,}1 & 0{,}565 & 0.335 \end{pmatrix}$.

Peut-on en déduire que la matrice $\mathbb{P}$ est primitive ?

2e ligne 1e colonne $= 0 \cdot 0{,}5 + 0{,}9 \cdot 0 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$
2e ligne 3e colonne $= 0 \cdot 0{,}45 + 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}14$
3e ligne 1e colonne $= 0{,}1 \cdot 0{,}5 + 0{,}4 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}1$
$\mathbb{P}^2$ est strictement positive donc $\mathbb{P}$ est primitive

4. Si l'on calcule avec l'ordinateur la puissance $P^{40}$ de la matrice de transition, on trouve (en ne retenant que les 4 premères décimales)

$$\mathbb{P}^{40} = \begin{pmatrix} 0.0377 & 0.7736 & 0.1887 \\ 0.0377 & 0.7736 & 0.1887 \\ 0.0377 & 0.7736 & 0.1887 \end{pmatrix}.$$

Peut-on en déduire les proportions d'herbe, d'arbustes et de forêt à long terme sur ce territoire? Expliquer pourquoi.

A long terme il y aura 3,77% d'herbe, 18,87% d'arbustes et 77,36% de forêt. La théorie de Perron-Frobenius dit que quelque soit la distribution initiale $\pi_0$ elle tendra vers une distribution stationnaire $\pi^\infty$, et cette distribution stationnaire $\pi^\infty$ est égale à une ligne de la matrice $\mathbb{P}^k$ où $k$ est une puissance suffisamment grande pour que $\mathbb{P}^k$ ait toutes ses lignes (presque) égales.

**Exercice 2.** : Le magicien d'Oz a comblé tous les désirs des habitants du pays d'Oz, sauf peut-être en ce qui concerne le climat : au pays d'Oz en effet, s'il fait beau un jour, il est certain qu'il pleuvra ou neigera le lendemain, avec une probabilité égale qu'il pleuve ou qu'il neige. Et si le temps d'un jour est pluvieux ou neigeux, alors il reste inchangé dans 50% des cas le lendemain et ne devient beau que dans 25% des cas. Les habitants se sont plaint auprès du magicien, affirmant que, ce faisant, ils n'ont qu'un beau jour sur dix, ce à quoi il a répondu qu'il s'agit d'une impression mais qu'en réalité il y a au moins un beau jour sur cinq. Qu'en est-il ?

Pour le savoir, on se propose de modéliser l'évolution du climat au pays d'Oz par une chaîne de Markov à 3 états, $\{P, B, N\}$ (pour **P**luvieux, **B**eau, et **N**eigeux) dont la matrice de transition est notée $\mathbb{P}$.

1. Que vaut $\mathbb{P}$ ?

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} P & B & N \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ B \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. On a calculé le carré de la matrice $\mathbb{P}$ et trouvé $\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0,4375 & 0,1875 & 0,375 \\ 0{,}375 & 0{,}25 & 0,375 \\ 0,375 & 0,1875 & 0,4375 \end{pmatrix}$

   Compléter les coefficients manquant, en expliquant vos calculs.

   2e ligne 1e colonne $= 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}25 = 0{,}375$

   2e ligne 2e colonne $= 0{,}5 \cdot 0{,}25 + 0 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 0{,}25 = 0{,}25$

3. Le calcul des puissances successives de la matrice $\mathbb{P}$ montre qu'à partir de la puissance sixième elles restent pratiquement inchangées et égales à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

   Cela suggère l'existence d'une distribution stationnaire pour cette chaîne de Markov. Le vérifier en expliquant vos calculs. On prend la distribution $(0{,}4 \quad 0{,}2 \quad 0{,}4)$ alors

   $(0{,}4 \quad 0{,}2 \quad 0{,}4) \times \mathbb{P} = (0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}5 + 0{,}4 \cdot 0{,}25 \; ; \; 0{,}4 \cdot 0{,}25 + 0{,}2 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot 0{,}25 \; ; \; 0{,}4 \cdot 0{,}25 + 0{,}2 \cdot 0{,}5 + 0{,}4 \cdot 0{,}5) = (0{,}4 \quad 0{,}2 \quad 0{,}4)$

   Cette distribution est stationnaire.

4. En déduire la réponse à la question initiale : qui du magicien ou de la population du pays d'Oz a la bonne estimation du nombre de jours de beau temps ? Expliquer.

   $\mathbb{P}^2$ est strictement positive donc la théorie de Perron-Frobenius s'applique : toute distribution initiale tendra vers la distribution stationnaire $(0{,}4 \quad 0{,}2 \quad 0{,}4)$ soit 20% de jours de beau temps. Le magicien a donc raison.