NOM : Date : .
PRENOM : Groupe : .

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 2
Modèle dynamique pour deux espèces en compétition

Le système de Lotka-Volterra nous a permis de modèliser la dynamique de deux populations présentant une relation de type proies-prédateurs. Nous allons à présent modéliser la dynamique de *deux populations en compétition*, par exemple parce qu'elles partagent la même nourriture ou le même territoire. Notre objectif est d'étudier les possibilités de coexistence de ces deux populations. On choisit de faire les hypothèses suivantes :

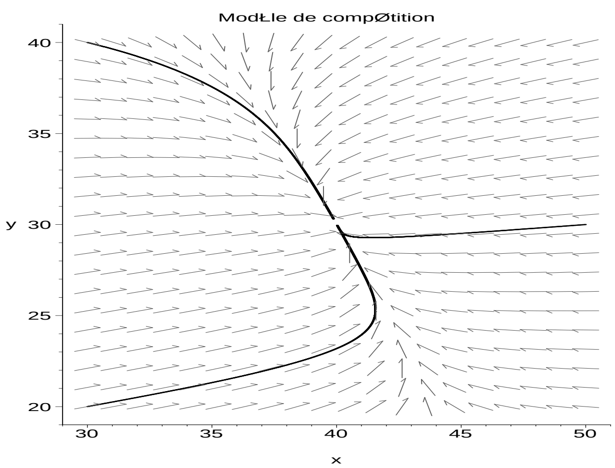
- En l'absence de l'autre espèce, chacune des deux espèces suit un modèle logistique ($x' = (\alpha_1 - \beta_1 x)x$ et $y' = (\alpha_2 - \beta_2 y)y$).
- le taux de mortalité supplémentaire pour chacune des espèces dû à la présence de l'autre espèce est proportionnel à la fois à la taille de l'une et de l'autre des deux populations (et donc proportionel à leur produit).

Voici un exemple qui modélise la compétition entre deux populations de scorpions du désert, noirs et rouges respectivement :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 0,1x(3 - 0,06x - 0,02y) \\ y' & = & 0,1y(1 - 0,01x - 0,02y) \end{array}\right. \qquad (1)$$

1. Précisez quel est le taux de croissance intrinsèque r et la capacité biotique K de la population de scorpions rouges $y(t)$ lorsque l'autre population de scorpions noirs $x(t)$ est absente puis préciser quelle est, dans ce cas, le comportement de la population de scorpions rouges en esquissant l'allure du graphe de $y(t)$ en supposant $y(0) = 30$.

2. Calculer les coordonnées (x', y') du vecteur de ce champs de vecteurs situé au point $A = (35, 20)$ et vérifier sa direction sur la figure. Même question pour celui du point $B = (40, 35)$.



3. Calculer les équations de deux droites qui sont les isoclines $x' = 0$ du système (1).

4. Même question pour les deux isoclines $y' = 0$.

5. Dans un plan (x, y), tracer ci dessous les isoclines du système puis indiquer dans chaque région qu'elles délimitent (et sur les isoclines elle-même) les flèches donnant l'allure du champs de vecteurs.

6. Combien le système (1) a-t-il de points d'équilibres ? Calculer leurs coordonnées et les repérer sur la figure précédente.

7. Que pensez-vous de l'évolution des deux populations selon ce modèle ? Vont-elles coexister ou l'une d'elles va-t-elle disparaître ? Expliquer.

8. Tracer approximativement les deux graphes des composantes $x(t)$ et $y(t)$ de la solution de (1) issue du point A (question 2).