NOM : Date : 11 - 15 Octobre 2010 .
PRENOM : Groupe : .

Mathématiques Appliquées à la Biologie : Feuille-réponses du TD 5
Modèle logistique

La chenille de l'épicéa est un insecte ravageur des sapins baumiers d'Amérique du nord dont la dynamique peut être représentée par l'équation différentielle

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t)\left(1 - \frac{y(t)}{4a}\right) \tag{1}$$

où $y(t)$ désigne la taille de la population à l'instant t et r et a des paramètres que l'on suppose égaux à $r = 0.1$ et $a = 2000$ (on néglige ici la pression exercée sur la population de chenilles par son principal prédateur).

1. Comment s'appelle ce modèle et que représentent les deux paramètres r et a ?

2. Esquisser le graphe de la solution de cette équation différentielle de condition initiale $y(0) = 200$ et décrire l'évolution de la population dans ce cas.

3. On sait que la solution de cette équation différentielle de condition initiale $y(0)$ est de la forme $y(t) = \frac{4ay(0)}{y(0)+(4a-y(0))e^{-rt}}$. En remplaçant les constantes par leurs valeurs, indiquer de quelle fonction il s'agit lorsque $y(0) = 200$, puis calculer sa valeur aux temps $t = 10$ et $t = 20$. Donner, sans calcul, une valeur approchée en $t = 100$.

4. Si, au lieu de choisir le modèle (1), on avait préféré un modèle malthusien $y'(t) = 0.1y(t)$, quelle serait, dans ce cas, la solution $y(t)$? Calculer sa valeur aux temps $t = 10$ et $t = 20$ et esquisser le graphe de cette solution.

5. Comparez la valeur atteinte par la population de chenilles pour des temps grands dans le modèle (1) et dans le modèle malthusien. Qu'en pensez-vous ?

6. Dans le modèle (1), la taille de la population pourrait-elle tendre vers l'infini (si par exemple sa valeur initiale $y(t)$ était très importante) ? Pourquoi ?

7. En utilisant l'équation différentielle, calculer la limite, quand t tend vers l'infini, du taux de croissance $\frac{y'(t)}{y(t)}$ et expliquer pourquoi le comportement de ce taux de croissance pour les temps grands est plus réaliste que celui du modèle exponentiel.

8. Qu'advient-il à la population, selon ce modèle, si sa taille initiale est $y(0) = 10000$? Faire un dessin.