Corrigé

NOM :
PRENOM :

Groupe :

Date : 11 - 15 Octobre 2010 .

Mathématiques Appliquées à la Biologie : Feuille-réponses du TD 5
Modèle logistique

La chenille de l'épicéa est un insecte ravageur des sapins baumiers d'Amérique du nord dont la dynamique peut être représentée par l'équation différentielle

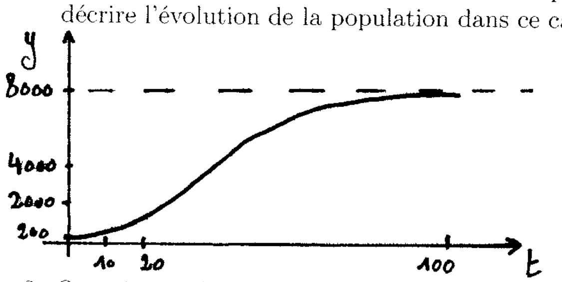
$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t)\left(1 - \frac{y(t)}{4a}\right) \qquad (1)$$

où $y(t)$ désigne la taille de la population à l'instant t et r et a des paramètres que l'on suppose égaux à $r = 0.1$ et $a = 2000$ (on néglige ici la pression exercée sur la population de chenilles par son principal prédateur).

1. Comment s'appelle ce modèle et que représentent les deux paramètres r et a ?

C'est un modèle logistique.
Le paramètre r représente le taux de croissance intrinsèque.
Le paramètre a représente le quart de la capacité biotique.

2. Esquisser le graphe de la solution de cette équation différentielle de condition initiale $y(0) = 200$ et décrire l'évolution de la population dans ce cas.



La population croît d'abord exponentiellement à partir de $y(0)=200$, puis la croissance ralentit et la population tend vers 8000.

3. On sait que la solution de cette équation différentielle de condition initiale $y(0)$ est de la forme $y(t) = \frac{4ay(0)}{y(0)+(4a-y(0))e^{-rt}}$. En remplaçant les constantes par leurs valeurs, indiquer de quelle fonction il s'agit lorsque $y(0) = 200$, puis calculer sa valeur aux temps $t = 10$ et $t = 20$. Donner, sans calcul, une valeur approchée en $t = 100$.

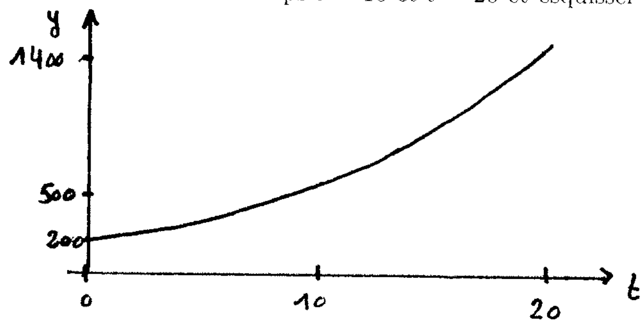
$y(t) = \frac{4 \times 2000 \times 200}{200 + (4 \times 2000 - 200)\, e^{-0,1t}} = \frac{8000}{1+39\, e^{-0,1t}}$

$y(10) = \frac{8000}{1+39\, e^{-1}} \simeq 521,26$ $\qquad y(20) = \frac{8000}{1+39\, e^{-2}} \simeq 1274,28$

$y(100) \sim 7985,86$ On est proche de la valeur limite 8000

4. Si, au lieu de choisir le modèle (1), on avait préféré un modèle malthusien $y'(t) = 0.1y(t)$, quelle serait, dans ce cas, la solution $y(t)$? Calculer sa valeur aux temps $t = 10$ et $t = 20$ et esquisser le graphe de cette solution.

La solution est
$y(t) = 200\, e^{0,1t}$
$y(10) = 200e \simeq 543,66$
$y(20) = 200e^2 \simeq 1477,81$

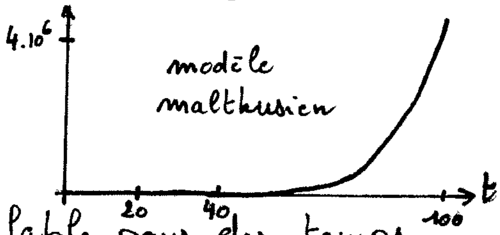


5. Comparez la valeur atteinte par la population de chenilles pour des temps grands dans le modèle (1) et dans le modèle malthusien. Qu'en pensez-vous ?

Avec le modèle (1) on a $y(100) \simeq 7986$

Avec le modèle malthusien on a

$y(100) \approx 4{,}4053 \times 10^6$



Le modèle malthusien n'est pas valable pour des temps grands : il donne une croissance exponentielle de la population.

6. Dans le modèle (1), la taille de la population pourrait-elle tendre vers l'infini (si par exemple sa valeur initiale $y(t)$ était très importante) ? Pourquoi ?

Si $y(0)$ est grand (en fait $y(0) > 4a$, soit $y(0) > 8000$) alors $y'(0)$ est négatif donc la population décroit.

En général si $y(t) > 8000$ alors $y'(t) < 0$ et la population décroit, elle ne peut donc pas tendre vers l'infini.

7. En utilisant l'équation différentielle, calculer la limite, quand t tend vers l'infini, du taux de croissance $\frac{y'(t)}{y(t)}$ et expliquer pourquoi le comportement de ce taux de croissance pour les temps grands est plus réaliste que celui du modèle exponentiel.

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = 0{,}1\left(1 - \frac{y(t)}{8000}\right). \text{ Donc } \lim_{t \to +\infty} \frac{y'(t)}{y(t)} = 0{,}1\left(1 - \frac{\lim_{t\to+\infty} y(t)}{8000}\right)$$

$$= 0{,}1\left(1 - \frac{8000}{8000}\right) = 0$$

Le taux de croissance tend vers zéro quand t tend vers l'infini et la population tend vers les capacités biologiques du milieu. C'est plus réaliste qu'un taux de croissance qui reste constant même quand on s'approche des capacités biologiques du milieu.

8. Qu'advient-il à la population, selon ce modèle, si sa taille initiale est $y(0) = 10000$? Faire un dessin.

La population décroit vers la capacité biotique de 8000