

NOM :
PRENOM :

Date :
Groupe :

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 5
Nature des points d'équilibre

Exercice 1. : On reprend le modèle de compétition entre les deux populations de scorpions du désert déjà étudié :

$$\begin{cases} x' &= 0.1x(3 - 0.06x - 0.02y) \\ y' &= 0.1y(1 - 0.01x - 0.02y) \end{cases} \quad (1)$$

1. On note $f(x, y)$ et $g(x, y)$ les deux fonctions :

$$f(x, y) = 0.3x - 0.006x^2 - 0.002xy \quad , \quad g(x, y) = 0.1y - 0.001xy - 0.002y^2.$$

Calculer les deux dérivées partielles de f et g .

2. Vérifier que le point $(40, 30)$ est bien un équilibre du système.

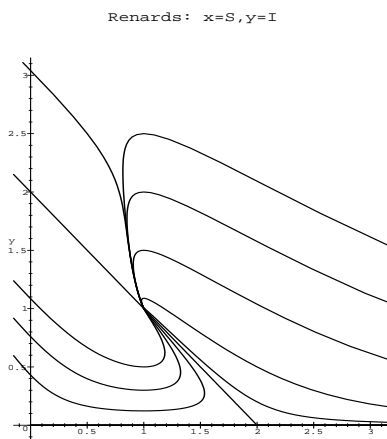
3. Calculer la matrice jacobienne $A(x, y)$ du système en ce point d'équilibre.

4. Déduire de la question précédente la nature de ce point d'équilibre. puis vérifier que ce résultat est compatible avec le tracé des trajectoires vu précédemment.

Exercice 2. : En 1979, une épidémie de rage, en provenance d'Europe orientale, est arrivée en France, principalement par l'Est. Les renards étaient l'un des vecteurs de la rage. En notant $S(t)$ les individus sains et $I(t)$ les individus infectés on peut proposer comme modèle de transmission de la rage, tenant compte de la contamination des renards sains par des renards malades le modèle suivant (r, K, β, u étant des constantes positives) :

$$\begin{cases} S' &= (S + I) \left(1 - \frac{S}{2}\right) - SI \\ I' &= SI - I \end{cases} \quad (2)$$

1. Calculer l'isocline $I' = 0$ (dite *horizontale*) et en déduire les coordonnées des trois points d'équilibre du système.
2. Calculer la matrice jacobienne $A(S, I)$ du système et en déduire sa valeur aux trois points d'équilibre.
3. Déduire de la question précédente la nature des trois points d'équilibre. On pourra vérifier si les résultats obtenus sont compatibles avec le tracé des trajectoires ci-dessous :



4. En étudiant la dynamique de l'épidémie selon le nombre d'individus infestés à l'instant initial, pensez-vous que, selon ce modèle, l'épidémie restera maîtrisée ?