/

NOM : Corrigé
PRENOM :

Date : .
Groupe : .

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 5
Nature des points d'équilibre

Exercice 1. : On reprend le modèle de compétition entre les deux populations de scorpions du désert déja étudié :

$$\begin{cases} x' = 0.1x(3-0.06x-0.02y) \\ y' = 0.1y(1-0.01x-0.02y) \end{cases} \tag{1}$$

1. On note $f(x,y)$ et $g(x,y)$ les deux fonctions :

$$f(x,y) = 0.3x - 0.006x^2 - 0.002xy \quad , \quad g(x,y) = 0.1y - 0.001xy - 0.002y^2.$$

Calculer les deux dérivées partielles de f et g.

Les dérivées partielles de f :

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0.3 - 0.012x - 0.002y$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.002x$

Les dérivées partielles de g :

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -0.001y$ $\qquad$ $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0.1 - 0,001x - 0,004y$

2. Vérifier que le point $(40,30)$ est bien un équilibre du système.

Il faut vérifier que $f(40,30) = 0$ et que $g(40,30) = 0$.

$f(40,30) = 0.1(40)(3-(0.06)(40)-0.02(30)) = 0.4(3-2.4-0.6) = 0$

$g(40,30) = 0.1(30)(1-(0.01)(40)-0.02(30)) = 0.3(1-0.4-0.6) = 0$

Donc x' et y' s'annulent bien au point $(40,30)$.

3. Calculer la matrice jacobienne $A(x,y)$ du système en ce point d'équilibre.

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 - 0.012x - 0.002y & 0.002x \\ -0.001y & 0.1-0.001x-0.004y \end{pmatrix}$$

d'où

$$A(40,30) = \begin{pmatrix} -0.24 & 0.08 \\ -0.03 & -0.06 \end{pmatrix}$$

4. Déduire de la question précédente la nature de ce point d'équilibre. puis vérifier que ce résultat est compatible avec le tracé des trajectoires vu précédemment.

Calculons $\operatorname{tr} A$ et $\det A$: $\operatorname{tr} A = (-0.24 - 0.06) = -0.3$

$\det A = (-0.24)(-0.06) - (-0.03)(0.08) = 0.0168$

D'où $\frac{1}{4}(\operatorname{tr} A)^2 = \frac{1}{4}(0.09) = 0.0225$. On a donc ici $\det A < \frac{1}{4}(\operatorname{tr} A)^2$.

Donc $(40,30)$ est un noeud stable. C'est bien ce que l'on voit sur la figure du TD3.

Exercice 2. : En 1979, une épidémie de rage, en provenance d'Europe orientale, est arrivée en France, principalement par l'Est. Les renards étaient l'un des vecteurs de la rage. En notant $S(t)$ les individus sains et $I(t)$ les individus infectés on peut proposer comme modèle de transmission de la rage, tenant compte de la contamination des renards sains par des renards malades le modèle suivant (r, K, β, u étant des constantes positives) :

$$\begin{cases} S' &= (S+I)\left(1-\frac{S}{2}\right) - SI \\ I' &= SI - I \end{cases} \qquad (2)$$

1. Calculer l'isocline $I' = 0$ (dite *horizontale*) et en déduire les coordonnées des trois points d'équilibres du système.

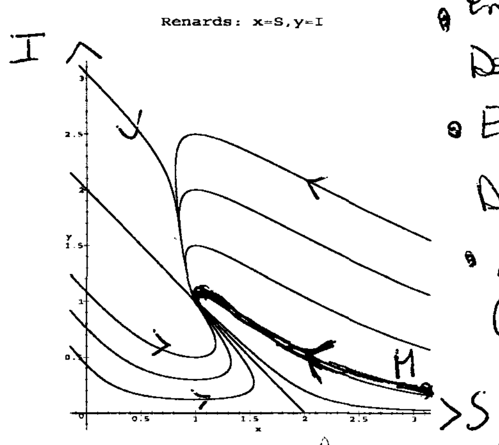
Comme $SI - I = 0 \Leftrightarrow I = 0$ ou $S = 1$, l'isocline $I' = 0$ est la réunion des 2 droites $I = 0$ et $S = 1$. Les équilibres sont donc solution soit de $\begin{cases}(S+I)(1-\frac{S}{2}) - SI = 0 \\ I = 0\end{cases}$ soit de $\begin{cases}(S+I)(1-\frac{S}{2}) - SI = 0 \\ S = 1\end{cases}$. Dans le 1er cas, on trouve $\begin{pmatrix} S=0 \\ I=0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} S=2 \\ I=0 \end{pmatrix}$ et dans le second $\begin{pmatrix} S=1 \\ I=1 \end{pmatrix}$.

2. Calculer la matrice jacobienne $A(S, I)$ du système et en déduire sa valeur aux trois points d'équilibre.

$A(S,I) = \begin{pmatrix} 1 - S - \frac{3}{2}I & 1 - \frac{3}{2}S \\ I & S-1 \end{pmatrix}$ d'où $A(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$A = (2,0) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A(1,1) = \begin{pmatrix} -3/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Déduire de la question précédente la nature des trois points d'équilibre. On pourra vérifier si les résultats obtenus sont compatibles avec le tracé des trajectoires ci-dessous :



- En $\begin{pmatrix} S=0 \\ I=0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{tr} A = 0$ et $\det A = -1$. Donc cet équilibre est un col.
- En $\begin{pmatrix} S=2 \\ I=0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{tr} A = 0$ et $\det A = -1$. Donc cet équilibre est aussi un col.
- En $\begin{pmatrix} S=1 \\ I=1 \end{pmatrix}$, $\operatorname{tr} A = -\frac{3}{2}$ et $\det A = \frac{1}{2}$. Comme $\frac{1}{2} < \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{8}$, l'équilibre est, dans ce cas, un nœud stable.

On peut vérifier sur la figure qu'aux points $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ la figure est bien un col et en $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, toutes les trajectoires tendent vers cet équilibre.

4. En étudiant la dynamique de l'épidémie selon le nombre d'individus infestés à l'instant initial, pensez-vous que, selon ce modèle, l'épidémie restera maitrisée ?

Si au départ il y a peu d'individus infestés et beaucoup d'individus sains $S(t)$, comme au point M, le nombre d'individus infestés va croître mais il va ensuite tendre vers l'équilibre donc l'épidémie restera maîtrisée, selon ce modèle.