NOM : Date : 25 - 29 Octobre 2010 .
PRENOM : Groupe : .

Mathématiques Appliquées à la Biologie : Feuille-réponses du TD 6
Equations différentielles

Exercice 1. : En théorie de l'apprentissage, les psychologues utilisent des courbes de performance $P(t)$ qui indiquent le niveau atteint à l'instant t par une personne qui acquiert une compétence. La dérivée $\frac{dP(t)}{dt}$ de $P(t)$, qui indique la vitesse d'acquisition de cette compétence, est supposée proportionelle à l'écart $M - P(t)$, où M est le niveau maximal atteignable par la personne (cela signifie qu'au début de l'apprentissage, celui-ci est rapide puis, à mesure que la personne approche du niveau maximal, sa vitesse d'acquisition diminue). On a donc pour $P(t)$ une équation différentielle de la forme

$$\frac{dP(t)}{dt} = k(M - P(t))$$

où $k > 0$ est une constante. Cette équation différentielle est-elle une équation linéaire ? Pourquoi ?

Résoudre cette équation différentielle et indiquer l'allure d'une courbe de performance $P(t)$ (en choisissant une valeur raisonnable pour $P(0)$).

Exercice 2. : Soit l'équation différentielle $y' = 2y - 3e^{-t}$.

1. Trouver une solution particulière de la forme $y(t) = Ae^{-t}$.

2. En déduire la solution générale de l'équation.

3. Trouver la solution particulière de condition initiale $y(0) = \frac{1}{2}$. Calculer sa valeur en $t = \frac{1}{10}$.

Exercice 3. : Des nutriments entrent dans une cellule à la vitesse constante R molécules par unité de temps et en sortent proportionnellment à la concentration. Si $N(t)$ désigne la concentration à l'instant t cette dynamique peut s'écrire $\frac{dN(t)}{dt} = R - KN(t)$. Selon ce modèle, la concentration va-t-elle tendre vers un équilibre ? Lequel ? Est-il stable ?

Exercice 4. :

1. Montrer que l'équation différentielle

$$\frac{dy(t)}{dt} = -2y(t) + 5\cos t$$

possède une solution particulière de la forme $\hat{y}(t) = A\cos t + B\sin t$ puis l'utiliser pour résoudre l'équation différentielle.

2. Indiquer l'allure des graphes des solutions de l'équation sur la figure ci-dessous et décrire leur comportement lorsque t tend vers l'infini. On appelle parfois la solution $\hat{y}(t)$ un é*quilibre dynamique.*