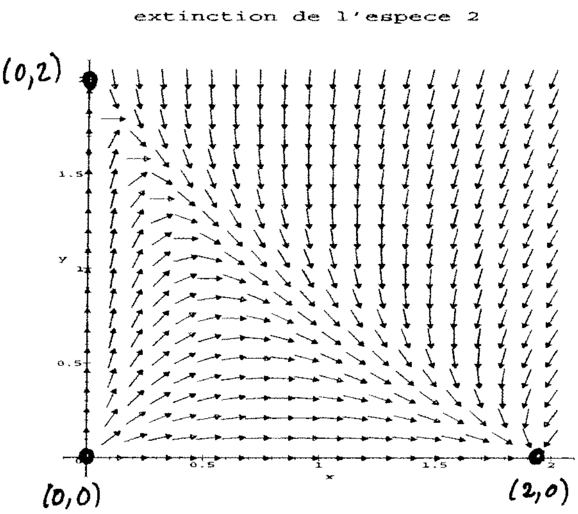
NOM : Corrigé Date : .
PRENOM : Groupe : .

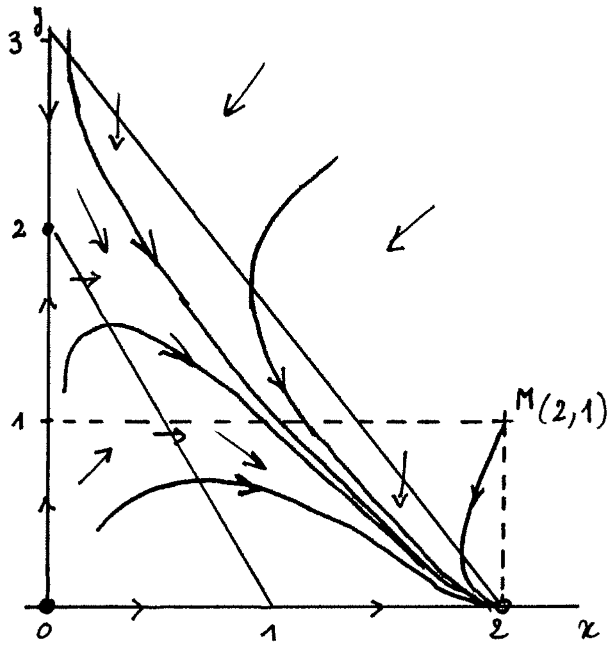
Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 6
Divers examples de modèles dynamiques

Les deux exercices qui suivent concernent la dynamique de *deux populations en compétition*, dont nous avons vu un premier exemple lors de la séance 2. Notre objectif dans les deux cas est d'étudier les possibilités de coexistence de ces deux populations.

Exercice 1. : Le premier exemple illustre ce que l'on appelle le *principe d'exclusion compétitive.* Voici son système différentiel et, plus bas, son champs de vecteurs :

$$\begin{cases} x' &= (1-0.5x-0.33y)x \\ y' &= (1-x-0.5y)y \end{cases} \tag{1}$$





1. Calculer les équations de deux droites qui sont les isoclines $x' = 0$ du système (1).

$x' = 0$ (vecteurs verticaux) donc $(1-0,5x-0,33y)x = 0$

Soit $\begin{cases} x = 0 & \text{axe des } y \\ \text{ou} & \\ 1-0,5x-0,33y = 0 & \text{droite } y \simeq 3,03 - 1,515x \end{cases}$

2. Même question pour les deux isoclines $y' = 0$.

$y' = 0$ (vecteurs horizontaux) donc $(1-x-0,5y)y = 0$

Soit $\begin{cases} y = 0 & \text{axe des } x \\ \text{ou} & \\ 1-x-0,5y = 0 & \text{droite } y = 2-2x \end{cases}$

3. A droite de la figure, tracer dans un plan (x, y) les isoclines du système puis tracer dans chaque région (et sur les isoclines) les flèches donnant l'allure du champs de vecteurs.

4. Combien le système (1) a-t-il de points d'équilibres ? Calculer leurs coordonnées, les repérer sur la figure. On doit avoir $x' = 0$ et $y' = 0$ donc

Soit $x = 0$ et $y = 0$ Point $(0,0)$

Soit $x = 0$ et $y = 2 - 2x$ donc $y = 2$ Point $(0,2)$

Soit $y = 3{,}03 - 1{,}515\,x$ et $y = 0$ donc $x = 2$ Point $(2,0)$

Soit $y = 3{,}03 - 1{,}515\,x$ et $y = 2 - 2x$ Point $(-2{,}125\,;\,6{,}25)$ non porté sur la figure car $x < 0$, pas de sens biologique

On a 4 points d'équilibre dont 3 visibles sur la figure

5. Déterminer la nature de chaque équilibre (noeud, col, foyer ou centre) et vérifier vos résultats sur votre figure. Ajouter quelques trajectoires. On calcule la jacobienne, son déterminant et sa trace

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - 0{,}33y + 1 & -0{,}33x \\ -y & 1 - x - y \end{pmatrix}$$

$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det J = 1 > 0$ trace $J = 2 > 0$ $\det J = 1/4\,(\text{trace } J)^2$ $(0,0)$ est un noeud instable

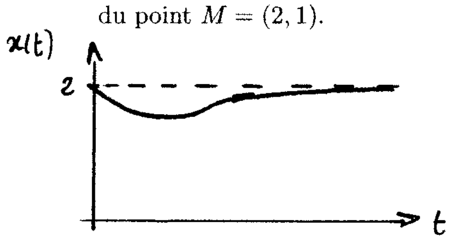
$J(2,0) = \begin{pmatrix} -1 & -0{,}66 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\det J = 1 > 0$ trace $J = -2 < 0$ $\det J = 1/4\,(\text{trace } J)^2$ $(2,0)$ est un noeud stable

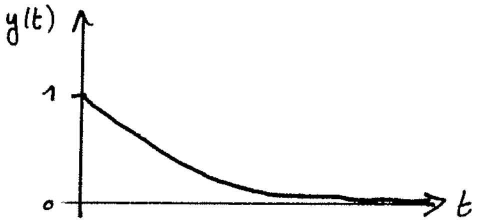
$J(0,2) = \begin{pmatrix} 0{,}33 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ $\det J = -0{,}33 < 0$ $(0,2)$ est un col

6. Que pensez-vous de l'évolution des deux populations selon ce modèle : vont-elles coexister ou l'une d'elle va-t-elle disparaître ? Expliquer. S'il n'y a pas de x $(x=0)$ on est sur l'axe des y on tend vers $y = 2$

En général $(x>0$ et $y>0)$ on voit sur le dessin que les trajectoires tendent vers l'équilibre attractif $(2,0)$. C'est à dire que la population y disparaît et la population x tend vers 2.

7. Tracer approximativement les deux graphes des composantes $x(t)$ et $y(t)$ de la solution de (1) issue du point $M = (2,1)$.





Exercice 2. : La figure suivante représente le champs de vecteurs associé à un autre système de deux espèces en compétition

$$\begin{cases} x' &= (1 - x - 2y)x \\ y' &= (1 - 2x - y)y \end{cases} \tag{2}$$

où $x(t)$ et $y(t)$ s'expriment en milliers d'individus.

1. Ajouter sur ce dessin les isoclines et les points d'équilibre (indiquer vos calculs ci-dessous).

$x' = 0$ (vecteurs verticaux)

donc $(1 - x - 2y)x = 0$

$\boxed{x = 0}$ axe des y

ou

$1 - x - 2y = 0$

droite $\boxed{y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x}$

$y' = 0$ (vecteurs horizontaux)

donc $(1 - 2x - y)y = 0$

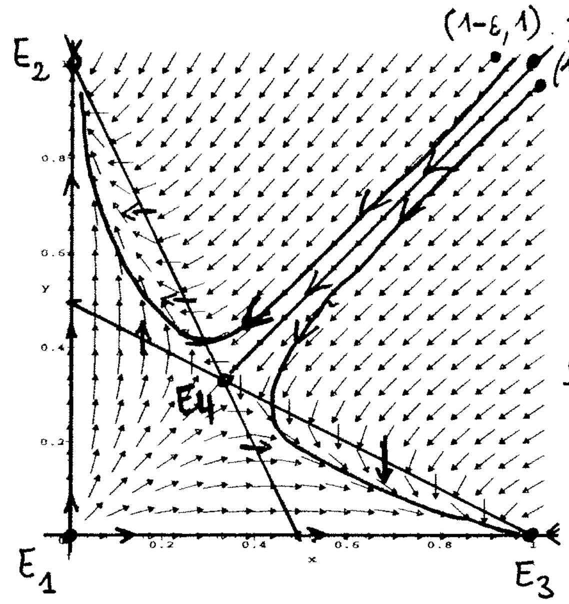
$\boxed{y = 0}$ axe des x

ou

$1 - 2x - y = 0$

droite $\boxed{y = 1 - 2x}$

coexistence improbable: extinction de l'une des deux especes



Points d'équilibres

Il faut $x'=0$ et $y'=0$ donc

Soit $x=0$ $y=0$ Point $E_1\ (0,0)$

Soit $x=0$ $y=1-2x$ donc $y=1$ Point $E_2\ (0,1)$

Soit $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x$ et $y=0$ donc $x=1$ Point $E_3\ (1,0)$

Soit $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x$ et $y=1-2x$

donc $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x=1-2x$

$1-x=2(1-2x)$

$3x=1$

donc $x=1/3$ $y=1-2\times 1/3=1/3$

Point $E_4\ (1/3,1/3)$

2. Déterminer la nature des équilibres. On calcule la jacobienne, son déterminant et sa trace

$$J(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2x-2y & -2x\\ -2y & 1-2x-2y\end{pmatrix}$$

$J(0,0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\det J=1>0$ trace $J=2>0$ $(0,0)$ est un noeud instable

$J(1,0)=\begin{pmatrix}-1&-2\\0&-1\end{pmatrix}$ $\det J=1>0$ trace $J=-2<0$ $(1,0)$ est un noeud stable

$J(0,1)=\begin{pmatrix}-1&0\\-2&-1\end{pmatrix}$ $\det J=1>0$ trace $J=-2<0$ $(0,1)$ est un noeud stable

$J(1/3,1/3)=\begin{pmatrix}-1/3&-2/3\\-2/3&-1/3\end{pmatrix}$ $\det J=-1/3$ $(1/3,1/3)$ est un col

3. Tracer la trajectoire issue de $(1,1)$. Peut-on parler dans ce cas de coexistence des deux populations ? Expliquer pourquoi.

La trajectoire issue de $(1,1)$ tend le long de la droite $y=x$ vers l'équilibre E_4. En ce point il y a coexistence des deux populations.

4. Même question pour la trajectoire issue du point $(1,1-\varepsilon)$, pour $\varepsilon>0$ petit.

La trajectoire issue de $(1,1-\varepsilon)$ longe la précédente, ne tend pas vers E_4 mais s'en écarte et tend vers E_3.

Il y a extinction de la population y.

5. Même question pour la trajectoire issue du point $(1-\varepsilon,1)$.

De même la trajectoire issue de $(1-\varepsilon,1)$ s'approche d'abord de E_4 puis s'en écarte pour tendre vers E_2.

Il y a extinction de la population x.

6. Expliquer pourquoi la dynamique de ce modèle conduit en général à l'extinction de l'une des deux populations.

Toutes les solutions de ce modèle conduisent soit vers E_3 soit vers E_2 sauf si $x(0)=y(0)$. L'égalité exacte des deux populations initiales étant improbable ce modèle conduit donc à l'extinction des x (E_2) ou des y (E_3).

Exercice 3. : On suppose que l'on alimente un bassin d'élevage de poissons par un flux constant de larves dont ils se nourissent. La dynamique des deux populations de larves et de poissons dans ce bassins ressemble à celle d'un modèle de Lotka-Volterra mais elle en diffère par le fait que le taux de croissance intrinsèque des larves n'est pas proportionel à la taille de cette population mais il est supposé constant au cours du temps. On a donc dans ce cas un modèle du type

$$\begin{cases} x' &= \alpha_1 - \beta_1 xy \\ y' &= -\alpha_2 y + \beta_2 xy \end{cases} \tag{3}$$

où $x(t)$ repésente la taille de la population de larves (en milliers) et $y(t)$ celle de la population de poissons. Ce type de modèle s'appelle un modèle *ressource-consommateur.* On suppose que $\alpha_1 = 20$, $\beta_1 = 0.04$, $\alpha_2 = 0.75$ et $\beta_2 = 0.03$.

1. Quel est, selon ce modèle, le taux de mortalité par tête des poissons ? Que représente les coefficients β_1 et β_2 ?

Le taux de mortalité des poissons est α_2 : si $x=0$ alors $y' = -\alpha_2 y$.
Les coefficients β_1 et β_2 sont des coefficients d'interaction des deux populations de larves et de poissons.

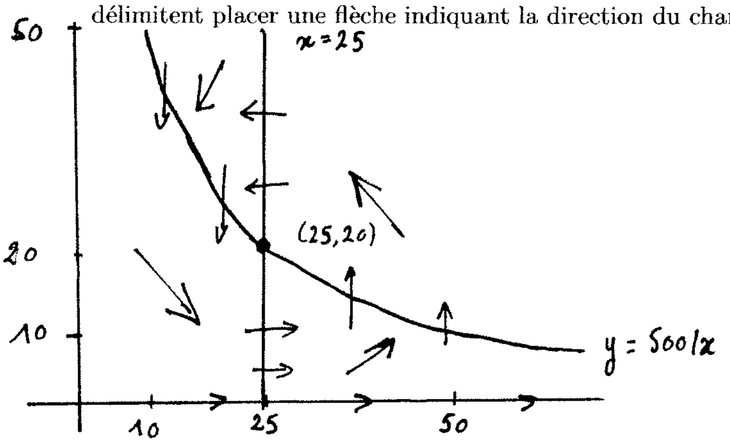
2. Ecrire le système différentiel pour ce modèle puis calculer les équations des deux isoclines $x' = 0$ et y'=0 et les coordonnées de l'équilibre.

$\begin{cases} x' = 20 - 0{,}04xy \\ y' = -0{,}75y + 0{,}03xy \end{cases}$ $x'=0$ (vecteurs verticaux) donc $20 - 0{,}04xy = 0$ soit $xy = 500$ ou $y = 500/x$

$y'=0$ (vecteurs horizontaux) donc $-0{,}75y + 0{,}03xy = 0$ soit $y=0$ ou $x = 0{,}75/0{,}03 = 25$. On a deux droites $y=0$ (axe des x) ou $x=25$ (droite verticale)

L'équilibre est à l'intersection de $y = 500/x$ et $x=25$: c'est le point $(25,20)$.

3. Dans le quadrant $x \geq 0, y \geq 0$ tracer les deux isoclines, et dans chacune des 4 régions qu'elles délimitent placer une flèche indiquant la direction du champs de vecteurs associé.



4. Peut-on en déduire le comportement des deux populations lorsque t tend vers $+\infty$?

On observe que les trajectoires tournent autour de l'équilibre $(25,20)$: les deux populations vont osciller. Mais on ne sait pas si elles tendent vers l'équilibre ou s'en éloignent.