Cours 2 : Initiation au calcul matriciel

La leçon précédente a montré qu'il pouvait être utile de calculer avec des matrices. Avant de voir d'autres exemples d'utilisation des matrices, arrêtons nous le temps d'une leçon pour apprendre ce calcul.

1 Qu'est-ce qu'une matrice ?

Une matrice est simplement un *tableau de nombres* par exemple

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -9 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Les nombres du tableau s'appellent les *coefficients* de la matrice. On dit que M_1 est une matrice 2×3 car elle a 2 lignes et 3 colonnes et que M_2 est une matrice 3×3, donc une *matrice carrée*. Plus généralement on dit que M est de *dimension* $m \times n$ lorsqu'elle a m lignes et n colonnes et on distingue ses coefficients à l'aide de deux indices $M = (m_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. Lorsque $m = 1$ (ou $n = 1$), la matrice est une *matrice ligne* (ou une *matrice colonne*), ou, plus simplement, un *vecteur*.

Une matrice ayant tous ses coefficients nuls sauf ceux qui sont situés sur la diagonale, comme par exemple

$$M_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

s'appelle une *matrice diagonale* (elle vérifie donc $m_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$). Enfin la *transposée* d'une matrice M est la matrice M' dont les colonnes sont les lignes de M ; par exemple

$$M_1' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}.$$

2 Opérations sur les matrices

On définit l'*addition* des matrices comme on le fait pour un vecteur : pour deux matrices de même dimension, on additionne les coefficients de même indice comme par exemple

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

De même pour la *multiplication* des matrices *par un nombre*, on multiplie simplement chaque coefficient de la matrice par ce nombre :

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour définir la *multiplication des matrices* entre elles, on commence par définir le produit de deux vecteurs, un vecteur ligne L et un vecteur colonne C ayant le même nombre de coefficients, comme étant le *produit scalaire* de ces vecteurs :

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad LC = 2 \times 0 + 1 \times (-1) + 5 \times 1 = 4.$$

Plus généralement, pour calculer un produit tel que $M_1 M_2$, on effectue 6 produits scalaires des lignes de $M_1 = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}$ par les colonnes de $M_2 = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$ de la façon suivante :

$$M_1 M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1C_1 & L_1C_2 & L_1C_3 \\ L_2C_1 & L_2C_2 & L_2C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 5 & 11 \\ -47 & 0 & -36 \end{pmatrix}.$$

A noter que le produit d'une matrice par une autre n'est possible que si le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la seconde. Ainsi, si M est une matrice $m \times n$ et N une matrice $n \times p$, le produit MN est une matrice $m \times p$. Signalons enfin que la matrice tranposée du produit MN peut s'obtenir à partir des transposées des facteurs M et N selon la formule $(MN)' = N'M'$. On pourra le vérifier avec le produit M_1M_2 par exemple.

On a vu dans la leçon précédente que pour une chaine de Markov de matrice de transition $\mathbb{P}$, l'évolution après une étape de la distribution initiale π_0 s'obtient précisément en multipliant le vecteur ligne π_0 par la matrice $\mathbb{P}$. Le produit $\pi_0\mathbb{P}$ est un vecteur ligne qui est la nouvelle distribution π_1 (ou distribution image au temps $t = 1$) et lorsqu'elle est restée inchangée (c'est-à-dire lorsque $\pi_0 = \pi_1$) on dit de cette distribution que c'est une *distribution stationnaire* pour cette chaine de Markov. Nous reviendrons sur la question importante des distributions stationnaires la semaine prochaine.

3 Matrices stochastiques, positives, primitives

On rappelle qu'une matrice carrée est dite *stochastique* lorsque ses coefficients sont compris entre 0 et 1 et que la somme des coefficients de chacune de ses lignes est égale à 1. Cela peut s'écrire formellement de la façon suivante :

Définition : Une matrice $M = (m_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le n}$ est *stochastique* si et seulement si
- Pour tout $i = 1, \ldots, n$ et tout $j = 1, \ldots, n$, $0 \le m_{ij} \le 1$.
- Pour tout $i = 1, \ldots, n$, $\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1$

On pourra vérifier que si l'on désigne par C_1 le vecteur colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1, la dernière propriété s'écrit encore $MC_1 = C_1$.

On peut calculer la suite des puissances M, $M^2 = MM$, $M^3 = MMM$, ... d'une matrice stochastique M et vérifier qu'elles sont toutes des matrices stochastiques.

Définition : On dit qu'une matrice M est *positive*, et on écrit $M \ge 0$, si tous ses coefficients sont positifs ou nuls et *strictement positive*, et on écrit $M > 0$, si tous ses coefficients sont strictement positifs

Les matrices stochastiques sont des exemples de matrices positives, elles sont parfois strictement positives mais pas nécessairement.

Définition : On dit qu'une matrice positive M est *primitive* si l'une des puissances de M a tous ses coefficients non nuls. Une matrice strictement positive a forcément toutes ses puissances strictement positives (pourquoi ?) ; c'est donc en particulier une matrice primitive.

4 Valeurs propres, vecteurs propres

Définition : Soit une matrice carrée M. Un nombre λ est une *valeur propre à gauche* de M (*left eigenvalue* en anglais) s'il existe un vecteur ligne V non nul tel que

$$VM = \lambda V.$$

Dans ce cas, le vecteur V s'appelle un *vecteur propre à gauche de* la matrice M (*left eigenvector* en anglais) . L'action de M sur le vecteur propre V consiste donc simplement à le multiplier par λ.

Nous avons vu l'exemple des distributions stationnaires d'une chaîne de Markov : une telle distribution π^* est, par définition, un vecteur propre à gauche de valeur propre 1 de la matrice de transition $\mathbb{P}$ de la chaîne de Markov (puisque l'on a $\pi^*\mathbb{P} = \pi^*$.

De la même façon un nombre λ sera appelé une *valeur propre à droite* de M s'il existe un vecteur colonne W tel que $MW = \lambda W$. Le vecteur W est alors appelé un *vecteur propre à droite associé à* la valeur propre λ.

Ainsi pour vérifier que $\lambda = 4$ est une valeur propre à gauche de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$de vecteur propre associé $V = (2 \quad -3)$, il suffit de vérifier que

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -12 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Puisqu'une distribution stationnaire d'une chaine de Markov n'est donc rien d'autre qu'un vecteur propre à gauche associé à la valeur propre à gauche 1, cela nous indique que pour trouver une distribution stationnaire il suffit de rechercher un vecteur propre associé à la valeur propre à gauche 1 mais il faudra aussi qu'il soit positif et que la somme de ses coefficients soit égale à 1.

L'ensemble des valeurs propres d'une matrice s'appelle le *spectre* de cette matrice. Une matrice $n \times n$ a au plus n valeurs propres, certaines peuvent être des nombres complexes. Par définition, à chaque valeur propre λ est associé au moins un vecteur propre mais en réalité, il est facile de voir que si V est un vecteur propre associé à λ, alors tous les multiples de V, comme $2V$ ou $-0.1V$, sont aussi des vecteurs propres associés à la même valeur propre. Il y en a donc une infinité pour chaque valeur propre.

Cette remarque a son importance pour le cas des matrices stochastiques : on peut montrer en effet que toute matrice stochastique possède la valeur propre 1 et donc possède aussi un vecteur propre associé qui pourrait fournir une distribution stationnaire. Mais ce vecteur n'est pas nécessairement positif et n'a pas nécessairement un multiple dont la somme des coefficients soit égale à 1. La recherche d'une distribution stationnaire, si elle existe, passe donc par la recherche d'un vecteur propre associé à $\lambda = 1$ qui ait cette propriété.

5 Comment faire du calcul matriciel avec son ordinateur ?

La plupart des logiciels de calcul scientifique offrent la possibilité de calculer avec des matrices. Voici comment procéder avec l'un d'eux, le logiciel Scilab, qu'il est facile de télécharger sur le web et qui est gratuit. Il suffit d'aller à l'adresse :

`http ://www.scilab.org/fr/`

et charger la dernière version (version 5.0.1), ce qui ne demande qu'un clic (et un peu d'attente). On execute alors le fichier `Scilab-5.0.1.exe` ce qui prend quelques minutes suppémentaires. Une fois installé, il est très facile de l'utiliser :

```
//pour saisir une matrice (par exemple celle du modèle de doudou le hamster)
M=[0.9 0.05 0.05 ;0.7 0 0.3 ;0.8 0 0.2] ;
// pour calculer son carré (et vérifier que c'est une matrice strictement positive et donc que M est primitive), ou sa puissance 100
M^2 ;M^100 ;
//pour touver l'ensemble de ses valeurs propres à gauche et ses vecteurs propres
[Valeurs_propres,vecteurs_propres]=spec(M') ;
```