

NOM :
PRENOM :

Groupe :

Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses de l'épreuve finale
10 Janvier 2012 (Durée 2 heures)

Calculatrice autorisée. Une feuille manuscrite RV autorisée. Usage du téléphone interdit

Exercice 1. : On étudie l'évolution au cours du temps des formations végétales sur un vaste territoire en les décomposant pour simplifier en trois catégories, *lande*, *maquis* et *forêt*. On modélise cette dynamique par une chaîne de Markov X_t d'espace d'états $S = \{l, m, f\}$ et de matrice de transition :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,65 & 0 \\ 0,15 & 0,3 & 0,55 \\ 0,25 & 0 & 0,75 \end{pmatrix}$$

1. Tracer le diagramme en points et flèches associé.
2. Les deux probabilités $P(X_t = m/X_{t-1} = f)$ et $P(X_t = m/X_{t-2} = f)$ sont-elles égales ? Expliquer pourquoi.

3. On a calculé le carré de la matrice \mathbb{P} et trouvé $\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} \dots\dots & 0,4225 & 0,3575 \\ 0,235 & 0,1875 & 0,5775 \\ \dots\dots & \dots\dots & 0,5625 \end{pmatrix}$

Compléter les coefficients manquants, en expliquant vos calculs.

4. Expliquer ce que l'on peut dire concernant l'évolution au cours du temps des formations végétales sur le territoire étudié si l'on sait que les puissances successives de la matrice \mathbb{P} restent pratiquement inchangées à partir de la puissance vingtième et valent

$$\begin{pmatrix} 0,252 & 0,234 & 0,514 \\ 0,252 & 0,234 & 0,514 \\ 0,252 & 0,234 & 0,514 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. : L'élan est le plus grand et le plus nordique des cerfs actuels, il vit dans les forêts de conifères (taïgas), à proximité de lacs et de rivières. Ce cervidé passe de longues heures à se rafraîchir dans ces lacs et rivières où il s'abreuve de plantes aquatiques riches en sodium, mais il se nourrit aussi de feuilles et d'écorces (plantes terrestres).

On désigne respectivement par A et T la quantité de plantes aquatiques et la quantité de plantes terrestres qu'il mange chaque jour (exprimée en kilogrammes). On suppose en outre que le volume maximal qu'il peut absorber chaque jour est de 30kg et que ses besoins en sodium le conduisent à consacrer au moins $2/3$ de sa nourriture quotidienne aux plantes aquatiques.

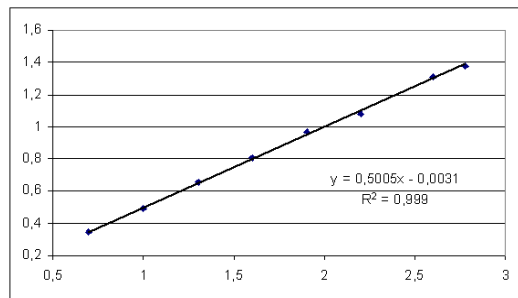
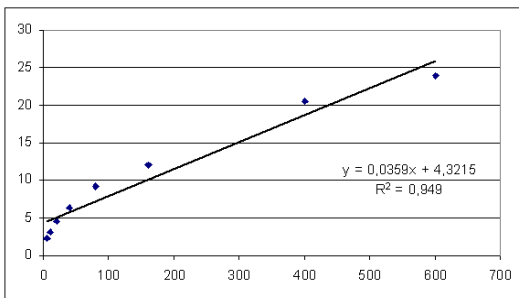
1. Dans un plan de coordonnées T, A , tracer les deux droites d'équation $A + T = 30$ et $A = 2T$.
2. Calculer les coordonnées de leur point d'intersection qu'on désignera par M .
3. Hachurez sur votre figure la région délimitée par ces deux droites et la droite $T = 0$. Le point de coordonnées $T = 5, A = 22$ appartient-il à cette région ? Expliquer pourquoi.
4. On suppose que l'apport énergétique quotidien de l'élan (exprimé en mégajoules) est donné par la relation linéaire $E = 3T + 0,75A$. Déterminer graphiquement quel est le régime optimal pour cet élan (et l'indiquer sur votre figure), c'est-à-dire le régime qui lui apporte le plus d'énergie, puis calculer l'apport énergétique optimal correspondant.

Exercice 3. :

Une biologiste a remarqué que sous une lumière douce, la quantité d'auxine (hormone végétale qui favorise la croissance en longueur des plantes) produite par les plantes augmentait avec l'intensité lumineuse à laquelle elles étaient exposées. Pour le confirmer, elle fait l'expérience suivante : elle sélectionne des plants identiques qu'elle place dans une pièce sombre plusieurs jours. Puis elle divise ces plants en 8 groupes de 10 plants, chaque groupe étant placé sous une source lumineuse d'intensité différente. Après deux semaines elle mesure la quantité d'auxine dans chaque plant et détermine la moyenne par groupe. Voici ses résultats

Intensité lumineuse (x_i)	5	10	20	40	80	160	400	600
Moyenne d'auxine (y_i)	2.2	3.1	4.5	6.4	9.2	12	20.5	23.9

1. Les figures suivantes représentent, à gauche, le nuage de points correspondant à ces données ainsi que la droite des moindres carrés correspondante et à droite le nuage des points ($X_i = \ln x_i, Y_i = \ln y_i$) obtenu à partir du précédent en prenant le logarithme de l'intensité lumineuse et de la moyenne d'auxine. Pensez-vous que la quantité d'auxine produite par les plantes augmente linéairement avec l'intensité lumineuse à laquelle elles sont exposées? Expliquez. Pensez-vous que le second nuage se prête mieux à une modélisation linéaire? Expliquez



2. Sachant que la moyenne et la variance des X_i valent respectivement 4,06 et 2,587, que celles des Y_i valent 2,02 et 0,648 et que leur covariance vaut 1,295 (valeurs approchées), calculer la droite des moindres carrés des points (X_i, Y_i) en expliquant vos calculs.

3. Quelle moyenne d'auxine ce modèle prédit-il pour une intensité lumineuse de 100?

Exercice 4. : Le modèle dynamique vu en cours de la population d'éléphants du parc Kruger est donné par l'équation différentielle

$$\frac{dN(t)}{dt} = 0.15N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{7500} \right) \quad (1)$$

où $N(t)$ désigne la taille de la population à l'instant t .

1. Pouvez-vous dire quelle est la capacité biotique de cette population, selon ce modèle ?
2. On sait que la solution de cette équation différentielle de condition initiale $N(0)$ est de la forme $N(t) = \frac{7500N(0)}{N(0) + (7500 - N(0))e^{-0.15t}}$. Précisez quelle est cette solution (en simplifiant son expression) lorsque la condition initiale vaut 20, puis calculer sa valeur aux temps $t = 10$ et $t = 50$.
3. Donner, sans calcul, une valeur approchée de cette solution en $t = 100$ et esquissez son graphe.
4. Esquisser le graphe de la solution de cette équation si l'on suppose la population initiale égale à 9000 (et non 20) et donner, sans calcul, une valeur approchée de cette solution en $t = 100$.