NOM : Date : 12-16 septembre 2011 .
PRENOM : Groupe : .

Mathématiques Appliquées à la Biologie : Feuille-réponses du TD 1
Introduction aux chaines de Markov

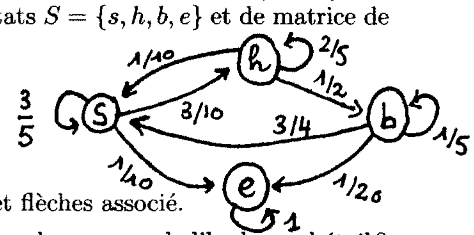
On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

Exercice 1[1] . :

Pour étudier l'évolution au cours du temps de molécules de phosphore dans un écosystème, on considère quatre états possibles, *la molécule est dans le sol* (état s), *la molécule est dans l'herbe* (état h), *la molécule est absorbée par du bétail* (état b) et enfin *la molécule est sortie de l'écosystème considéré* (état e). On modélise cette dynamique par une chaine de Markov X_t d'espace d'états $S = \{s, h, b, e\}$ et de matrice de transition :

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} s & h & b & e \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{20} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} s \\ h \\ b \\ e \end{array} \end{array}$$

d'où le diagramme en points et flèches



1. Tracer, à coté de la matrice ci-dessus, le diagramme en points et flèches associé.
2. Quelle est, selon ce modèle, la probabilité que la molécule de phosphore passe de l'herbe au bétail ? du sol à l'herbe ?

$P(X_{t+1} = b / X_t = h) = 1/2$ c'est l'élément de la 2^e ligne (h) et 3^e colonne (b) de $\mathbb{P}$

$P(X_{t+1} = h / X_t = s) = 3/10$ c'est l'élément de la 1^e ligne (s) et 2^e colonne (h) de $\mathbb{P}$

3. Calculer la probabilité d'une trajectoire du type $X_0 = s, X_1 = h, X_2 = b$ en fonction de $\pi_0(s)$.

$$P(X_0 = s, X_1 = h, X_2 = b) = P(X_0 = s) \cdot P(X_1 = h / X_0 = s) \cdot P(X_2 = b / X_1 = h)$$
$$= \pi_0(s) \cdot 3/10 \cdot 1/2 = \boxed{\pi_0(s) \cdot 3/20 = 0{,}15 \cdot \pi_0(s)}$$

4. Donner un exemple de trajectoire de probabilité nulle.

$X_0 = s, X_1 = b$ et toute trajectoire contenant ce passage de s à b.
Les bêtes ne mangent pas le sol !

5. Quelle est, selon ce modèle, la probabilité que la molécule passe de l'herbe à l'extérieur de l'écosystème en une étape ? en deux étapes ?

<u>En une étape</u> : $P(X_{t+1} = e / X_t = h) = \boxed{0}$

<u>En deux étapes</u> : $P(X_{t+2} = e / X_t = h) = P(X_{t+2} = e / X_{t+1} = s) \cdot P(X_{t+1} = s / X_t = h) + P(X_{t+2} = e / X_{t+1} = h) \cdot P(X_{t+1} = h / X_t = h) + P(X_{t+2} = e / X_{t+1} = b) \cdot P(X_{t+1} = b / X_t = h) + P(X_{t+2} = e / X_{t+1} = e) \cdot P(X_{t+1} = e / X_t = h) = 1/10 \cdot 1/10 + 0 \cdot 2/5 + 1/20 \cdot 1/2 + 1 \cdot 0$

$= 1/100 + 1/40 = \boxed{0{,}035}$

6. Connaissant la répartition initiale $\pi_0 = (0.4\ \ 0.2\ \ 0.2\ \ 0.2)$, calculer la répartition à l'étape suivante π_1.

$$\pi_1 = \pi_0 \mathbb{P} = (0{,}4\ \ 0{,}2\ \ 0{,}2\ \ 0{,}2) \begin{pmatrix} 3/5 & 3/10 & 0 & 1/10 \\ 1/10 & 2/5 & 1/2 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/5 & 1/20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Big(0{,}4 \cdot 3/5 + 0{,}2 \cdot 1/10 + 0{,}2 \cdot 3/4\ ;$$
$$0{,}4 \cdot 3/10 + 0{,}2 \cdot 2/5\ ;\ 0{,}2 \cdot 1/2 + 0{,}2 \cdot 1/5\ ;\ 0{,}4 \cdot 1/10 + 0{,}2 \cdot 1/20 + 0{,}2 \cdot 1\Big) =$$
$$\boxed{(0{,}41\quad 0{,}2\quad 0{,}14\quad 0{,}25)}$$

[1](Exercice inspiré du texte en ligne à http ://www.apprendre-en-ligne.net/graphes/markov/index.html)

Exercice 2 On reprend l'exemple de chaînes de Markov donné dans le cours. Rappeler quelle est l'ensemble d'états S et quelle est la matrice de transition.

Ensemble d'états

$S = \{h, a, f\} = \{\text{herbe}, \text{arbustes}, \text{forêt}\}$

Matrice de transition

$$P = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} h & a & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}45 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ h \\ a \\ f \end{array}$$

1. Calculer la distribution π_1 au temps $t = 1$ à partir de la distribution initiale π_0 dans les deux cas suivants $\pi_0 = (0.7, 0.2, 0.1)$ et $\pi_0 = (0.4, 0.3, 0.3)$ et, dans les deux cas, indiquer quelles formations végétales progressent et lesquelles regressent.

$$\pi_1 = (0{,}7 \quad 0{,}2 \quad 0{,}1) \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}45 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} = (0{,}7 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 \ ;$$

$$0{,}7 \cdot 0{,}45 + 0{,}2 \cdot 0{,}5 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 \ ; \ 0{,}7 \cdot 0{,}05 + 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}9) =$$

$\boxed{(0{,}37 \quad 0{,}425 \quad 0{,}205)}$ La surface occupée par l'herbe est divisée par 2 alors que les surfaces d'arbustes et de forêt doublent.

$$\pi_1 = (0{,}4 \quad 0{,}3 \quad 0{,}3) \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}45 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} = \boxed{(0{,}23 \quad 0{,}36 \quad 0{,}41)}$$

Les variations sont dans le même sens mais moins importantes : la surface d'herbe est presque divisée par 2 tandis que les arbustes augmentent de 20% et la forêt de 37%

2. On constate qu'on s'est trompé et que la probabilité de passer de l'état *herbe à* l'état *arbuste* est en réalité plutot 0.4 et celle de passer de l'état *herbe à* l'état *forêt* de 0.2. Quelle est la nouvelle chaine de Markov ? Refaire la question précédente dans ce nouveau modèle.

L'ensemble d'états $S = \{h, a, f\}$ comme précédemment mais la matrice de transition

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} h & a & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ h \\ a \\ f \end{array}$$

On a calculé l'élément de la 1e ligne, 1e colonne de $\mathbb{P}$ en utilisant le fait que la somme des éléments d'une ligne vaut 1, cet élément vaut donc $1 - 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}4$.

$$\pi_1 = (0{,}7 \quad 0{,}2 \quad 0{,}1) \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} = \boxed{(0{,}3 \quad 0{,}39 \quad 0{,}31)}$$

De même

$$\pi_1 = (0{,}4 \quad 0{,}3 \quad 0{,}3) \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} = \boxed{(0{,}19 \quad 0{,}34 \quad 0{,}47)}$$

Les variations vont dans le même **sens** que dans la question 1 : l'herbe diminue, les arbustes et la **forêt** augmentent mais elles sont plus fortes pour la forêt.