

NOM :  
PRENOM :

Date : 19-23 septembre 2011 .  
Groupe : .

**Mathématiques Appliquées à la Biologie : Feuille-réponses du TD 2**  
**Distribution stationnaire d'une chaîne de Markov**

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

**Exercice 1. :**

1. Soit une chaîne de Markov à 2 états de matrice de transition  $\mathbb{P}$  telle que  $p_{11} = 0.9$  et  $p_{21} = 0.4$ . Calculer l'image  $\pi_1$  par la chaîne de Markov de la distribution initiale  $\pi_0 = (0.2 \ 0.8)$ .

2. Calculer le nombre  $\alpha$  tel que  $\pi_0^* = (\alpha \ (1 - \alpha))$  soit une distribution stationnaire. En déduire que  $\lambda = 1$  est une valeur propre à gauche de la matrice  $\mathbb{P}$ ; expliquez.

3. Calculer le carré  $\mathbb{P}^2$ , puis les deux produits  $\pi_0\mathbb{P}^2$  et  $\pi_1\mathbb{P}$ . Que constatez-vous? Expliquez.

**Exercice 2. :**

1. Soit la matrice  $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer  $\mathbb{P}^2$  et  $\mathbb{P}^3$ . En déduire les valeurs de  $\mathbb{P}^4$ ,  $\mathbb{P}^5$ , ...

2. Est-il possible que l'une des puissance de  $\mathbb{P}$ ,  $\mathbb{P}^k$  pour un  $k \geq 1$ , soit une matrice dont tous les coefficients sont strictement positifs, c'est-à-dire est-il possible que la matrice  $\mathbb{P}$  soit primitive?

3. Pour  $\pi_0 = (\alpha \ \beta \ \gamma)$ , calculer les images successives  $\pi_1 = \pi_0\mathbb{P}$ ,  $\pi_2 = \pi_1\mathbb{P}$ , ... Qu'observez-vous?

4. Trouver un vecteur propre à gauche de  $\mathbb{P}$  de valeur propre  $\lambda = 1$ .