NOM : Corrigé — Date : 26 au 30 Septembre 2011

PRENOM : — Groupe : .

Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses du TD 3
Evolution vers une distribution stationnaire

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

Exercice 1.[1] : Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : ni malade ni immunisé (R), malade (M) ou immunisé (I). D'un mois sur l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes : étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité de 0,9 ou passer à l'état R avec une probabilité 0,1 ; étant malade, il peut le rester avec probabilité 0,2 ou devenir imunisé avec probabilité 0,8 ; enfin, étant dans l'état R, il peut le rester avec probabilité 0,5 ou devenir malade avec probabilité 0,5.

1. Décrire une chaîne de Markov d'espace d'états $S = \{R, M, I\}$ permettant de modéliser la population à laquelle appartient cet individu.

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R & M & I \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} R \\ M \\ I \end{array}$$

2. Calculer la proportion d'individus malades dans la population après un mois si 2% des individus étaient malades au départ et les autres ni malades ni immunisés.

On a $\pi_0 = (0,98 \quad 0,02 \quad 0)$

$$\pi_1 = (0,98 \quad 0,02 \quad 0) \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \end{pmatrix} = (0,49 \quad \boxed{0,494} \quad 0,016)$$

Après 1 mois 49,4% des individus sont malades.

3. Si l'on calcule avec l'ordinateur la puissance P^{20} de la matrice de transition, on trouve (en ne retenant que les 3 premères décimales) $\mathbb{P}^{20} = \begin{pmatrix} 0,151 & 0,094 & 0,755 \\ 0,151 & 0,094 & 0,755 \\ 0,151 & 0,094 & 0,755 \end{pmatrix}$ Peut-on en déduire que la matrice de transition de cette chaine de Markov est une matrice primitive ? Pourquoi ?

$\mathbb{P}$ est une matrice positive et $\mathbb{P}^{20}$ est une matrice strictement positive : tous ses éléments sont positifs non nuls. Donc $\mathbb{P}$ est une matrice <u>primitive</u>, c'est la définition donnée dans le cours.

4. Indiquer quelle sera la proportion d'individus malades dans cette population à long terme en expliquant votre raisonnement. $\mathbb{P}$ est une matrice primitive. D'après le cours il existe une distribution stationnaire π^∞ vers laquelle on tendra à partir de n'importe quelle distribution initiale π_0. On obtient cette distribution en calculant une puissance $\mathbb{P}^k$ de $\mathbb{P}$ assez grande pour que ses lignes soient égales. Donc ici $\pi^\infty = (0,151 \quad 0,094 \quad 0,755)$, à long terme il y aura 9,4% de malades.

5. Que se passerait-il selon ce modèle dans une région où la proportion de malades serait de 40% au départ ? Peut-on prévoir une épidémie dans ce cas ?

La population de malades tendra vers 9,4% de la population totale. Il n'y a pas d'épidémie : la population de malades diminue et se stabilise à moins de 10%.

[1](Exercice inspiré du texte en ligne à http ://www.apprendre-en-ligne.net/graphes/markov/index.html)

Exercice 2. : On veut étudier l'effet de la présence d'un couple de lions dans une portion de savane dans laquelle cohabitent trois populations d'animaux dont les lions se nourrissent. On modélise les proies, antilopes (a), gnous (g) et zèbres (z) comme les états d'une chaîne de Markov dont les trajectoires sont des successions de proies mangées par les lions, comme par exemple (gzzaggaa). On fait l'hypothèse que la probabilité qu'un lion mange une proie a (ou g ou z) après avoir mangé une proie g (ou a ou z) ne dépend que de a (ou g ou z) et non de ce qu'il avait mangé avant a (et que cette probabilité est invariante au cours du temps). D'où la modélisation par une chaîne de Markov d'espace d'états $S = \{a, g, z\}$ et dont on propose la matrice de transition suivante :

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & g & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ a \\ g \\ z \end{array}$$

1. Quelle est, selon ce modèle, la probabilité que les lions mangent un zèbre après avoir mangé une antilope ?

La probabilité $P(X_{t+1} = z \,/\, X_t = a)$ se lit directement dans la matrice $\mathbb{P}$ à la 1e ligne 3e colonne.

Elle vaut $\boxed{0{,}2}$

2. Des deux trajectoires suivantes, $(aazg)$ et $(agzz)$, quelle est la plus probable ? Justifier votre réponse par un calcul.

$P(aazg) = P(X_0 = a) \cdot P(X_1 = a / X_0 = a) \cdot P(X_2 = z / X_1 = a) \cdot P(X_3 = g / X_2 = z)$
$= \pi_0(a) \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}012\, \pi_0(a)$

$P(agzz) = P(X_0 = a) \cdot P(X_1 = g / X_0 = a) \cdot P(X_2 = z / X_1 = g) \cdot P(X_3 = z / X_2 = z)$
$= \pi_0(a) \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}02\, \pi_0(a)$

La trajectoire agzz est donc plus probable

3. La distribution π_0 suivante est-elle une distribution stationnaire pour cette chaîne de Markov ? Justifier votre réponse.

S	a	g	z
π_0	$\frac{11}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{6}{21}$

$$\pi_0 \mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{11}{21} & \frac{4}{21} & \frac{6}{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix} = \Big(\frac{11}{21} \cdot 0{,}6 + \frac{4}{21} \cdot 0{,}5 + \frac{6}{21} \cdot 0{,}4$$

$$\frac{11}{21} \cdot 0{,}2 + \frac{4}{21} \cdot 0{,}3 + \frac{6}{21} \cdot 0{,}1 \;;\; \frac{11}{21} \cdot 0{,}2 + \frac{4}{21} \cdot 0{,}2 + \frac{6}{21} \cdot 0{,}5 \Big) = \begin{pmatrix} \frac{11}{21} & \frac{4}{21} & \frac{6}{21} \end{pmatrix} = \pi_0$$

Donc π_0 est une distribution stationnaire

4. Si dans cette portion de savane la population des antilopes est au départ bien supérieure à celle des deux autres types de proies, va-t-elle, selon ce modèle, diminuer, augmenter ou rester prépondérante ? Expliquer.

Comme $\mathbb{P}$ est primitive (tous ses coefficients sont positifs non nuls) on peut appliquer la théorie de Perron - Frobenius : quelque soit la distribution initiale la distribution tendra vers la distribution stationnaire π_0 trouvée en 3.

La population d'antilopes tendra vers $11/21$ soit environ $52{,}4\%$.

Elle restera prépondérante mais si au départ elle était bien supérieure aux autres elle diminuera et tendra vers un peu plus de la moitié de la population totale.