NOM : Date : 3-7 octobre 2011.
PRENOM : Groupe : .

Mathématiques pour la Biologie (semestre 1) : Feuille-réponses du TD 4
Modèles de Leslie de populations structurées en ages

Exercice 1. : On considère une population de rongeurs présentant trois classes d'ages (0-1an, 1-2ans, et 2 ans) avec un cycle de reproduction de 3 ans. Si l'on désigne respectivement par j_t, p_t et a_t les effectifs à l'instant t de ces trois classes, on suppose que l'on a la dynamique suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} j_{t+1} & = & 5p_t + 10a_t \\ p_{t+1} & = & 0,5j_t \\ a_{t+1} & = & 0,4p_t \end{array}\right. \qquad (1)$$

1. Expliquez ce que signifient les 4 coefficients 5, 10, $0,5$ et $0,4$ qui figurent dans le modèle.

2. Les formules (1) permettent, à partir des effectifs initiaux des trois classes, (j_0, p_0, a_0), de calculer les effectifs (j_1, p_1, a_1) à l'instant suivant $t = 1$, puis, (j_2, p_2, a_2) à l'instant $t = 2$ et ainsi de suite. Voici les valeurs obtenues si les effectifs initiaux sont $j_0 = 30$, $p_0 = 50$ et $a_0 = 50$:

t	0	1	2	3	4	5	6
j_t	30	...	310	1560	2120	3740	7360
p_t	50	12	400	...	624	848	1496
a_t	50	25	6	150	...	312	424

Compléter les valeurs manquantes du tableau en expliquant vos calculs.

3. Si l'on désigne par $N_t = j_t + p_t + a_t$ l'effectif total de la population à l'instant t (et donc N_0 l'effectif initial), on peut également calculer à partir de (1) les termes successifs de la suite (N_t), ce qui permet d'apréhender aussi la dynamique de cette population dans son ensemble. On a ici :

t	0	1	2	3	4	5	6
N_t	130	...	...	.....	.....	.....	.....

Compléter les valeurs de $N(t)$ dans ce tableau et représenter graphiquement l'allure de la suite $(t, N(t))$. Commenter.

Exercice 2. :

1. En observant cette population de rongeurs à nouveau sur plusieurs années, on constate que les effectifs ne sont pas ceux prévus par le modèle précédent mais plutot les suivants :

t	0	1	2	3	4	5	6
j_t	30	800	290	2460	2470	7960	12330
p_t	50	15	400	145	1230	1235	3980
a_t	50	20	6	160	58	492	494

   On constate alors qu'en réalité un seul des 4 coeficients du modèle initialement prévu est à modifier pour que les données observées soient conformes à un tel modèle de Leslie. Pouvez-vous déterminer de quel coefficient il s'agit ? Expliquer.

2. On désigne par U le vecteur colonne représentant les effectifs des trois classes à l'instant $t = 1$. Calculer successivement, pour la matrice de Leslie de ce modèle, les produits LU, puis $L(LU)$, puis L^2 et enfin L^2U. Que constatez vous ?

3. Ayant vérifié que cette matrice est primitive, on a calculé sa valeur propre dominante et un vecteur propre associé : on a trouvé $\lambda = 2$ et $V = \begin{pmatrix} 0,970 & 0,243 & 0,485 \end{pmatrix}$. Calculer un vecteur propre, correspondant à cette même valeur propre, dont la somme des coefficients vaut 1.

4. Que peut-on en déduire sur la dynamique à long terme de cette population de rongeurs ? En particulier, quelle sera, selon ce modèle, la répartition entre les différentes classes d'ages après un temps long ?

5. Dans le cas du modèle de l'exercice 1, on calcule facilement qu'on aurait eu $\lambda = 1.77$ et $V = \begin{pmatrix} 5,95 & 1,345 & 0,38 \end{pmatrix}$. Les conclusions auraient-elles été très différentes ? Expliquez