Corrigé

Université de Nice
NOM :
PRENOM :

Département de Mathématiques, L1SV
Date : Semaine du 20 Février 2012

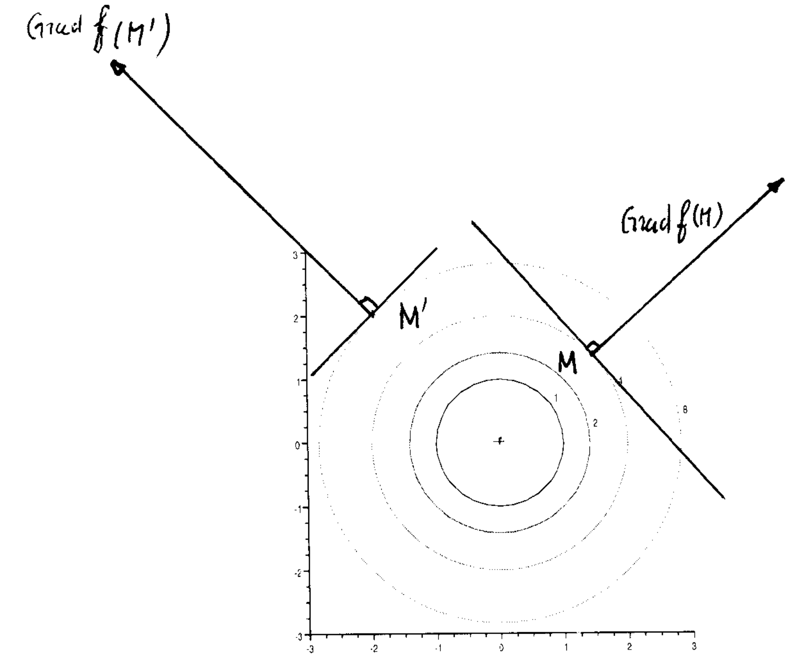
Groupe :

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 4
Loi de conservation pour le modèle de Lotka-Volterra

Exercice 1. : On considère la fonction f de deux variables $f(x, y) = x^2 + y^2$ dont les courbes de niveau sont représentées sur le dessin suivant.

Marquer le point M de coordonnées $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Quelle est l'équation de la courbe de niveau de f passant par ce point ? Quelle forme a cette courbe ? Calculer le vecteur gradient de f en ce point et tracer ce vecteur sur la figure. Qu'observez-vous ?

Même question au point M' de coordonnées $(-2, 2)$.



L'équation de la courbe de niveau passant par M est $x^2+y^2 = f(M) = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4$

$\underline{x^2+y^2=4}$

Cette courbe est un $\underline{\text{cercle}}$.

Grad $f(M) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)_M = (2x, 2y)_{(\sqrt{2},\sqrt{2})} = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

qui est perpendiculaire à la tangente au point

Grad $f(M') = (-4, 4)$ qui est, lui aussi, perpendiculaire à la tangente au point M' de la courbe de niveau.

Exercice 2. :

1. Trouver le gradient de la fonction $g(x, y) = 5y + xe^{2y}$ puis calculer sa valeur au point $(0, 0)$.

$$\text{Grad } g(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(5y + xe^{2y}), \frac{\partial}{\partial y}(5y+xe^{2y})\right) = (0 + e^{2y}, 5 + xe^{2y}.2)$$
$$= (e^{2y}, 5 + 2xe^{2y})$$
$$\text{Grad } g(0,0) = (e^{2\cdot 0}, 5 + 2\cdot 0\cdot e^{2y}) = (1, 5)$$

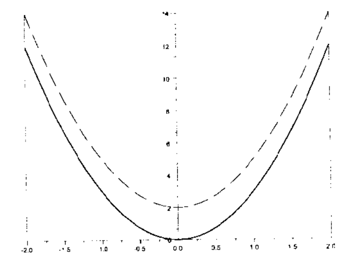
2. Calculer l'équation de la courbe de niveau k=0 de la fonction $h(x, y) = y - 3x^2$ puis tracer cette courbe. De même pour la courbe de niveau $k = 2$ de cette fonction.

Courbe de niveau $k=0$: $y - 3x^2 = 0 \iff y = +3x^2$

Courbe de niveau $k=2$: $y - 3x^2 = 2 \iff y = 3x^2 + 2$

Ce sont deux paraboles, symétriques autour de l'axe des y dont les sommets respectifs sont en $(0,0)$ et $(0,2)$. Les instructions Scilab suivantes donnent le graphe ci-contre :

```
x=-2:0.1:+2;
plot(x, 3.*x^2);
plot(x, 3.*x^2+2);
```

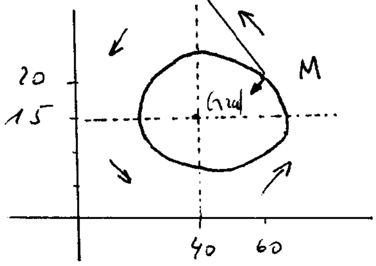


Exercice 3. : On reprend à présent un exemple de système de Lotka Volterra semblable à celui étudié lors de la première séance pour étudier la loi de conservation associée à ce système qui est donnée par la fonction $H(x,y) = 3\ln y - 0.2y + 4\ln x - 0.1x$.

(-60,+40)

$$\begin{cases} x' &= 3x - 0.2xy \\ y' &= -4y + 0.1xy \end{cases} \tag{1}$$

1. On considère le point M de coordonnées $M = (60, 20)$. Représenter approximativement la courbe de niveau de H passant par M (en se souvenant qu'il s'agit d'une trajectoire du système).



2. Calculer le vecteur gradient de H au point M et tracer ce vecteur sur votre figure.

$\text{Grad } H = \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}\right) = \left(\frac{d}{dx}(4\ln x - 0.1x), \frac{d}{dy}(3\ln y - 0.2y)\right) = \left(\frac{4}{x} - 0.1, \frac{3}{y} - 0.2\right)$

$\text{Grad } H(M) = \left(\frac{4}{x} - 0.1, \frac{3}{y} - 0.2\right)_{(60,20)} = \left(\frac{4}{60} - 0.1, \frac{3}{20} - 0.2\right) = (-0.033\ldots, -0.05)$

3. Sachant que les courbes de niveau de H sont les graphes des solutions du système de Lotka-Voterra, calculer les coordonnées (x', y') d'un vecteur tangent à cette courbe au point M et tracer ce vecteur sur votre figure.

Au point $M = (60, 20)$ on a $x' = 3x - 0.2xy = 3 \cdot 60 - 0.2 \cdot 60 \cdot 20 = 180 - 240 = -60$

$y' = -4y + 0.1xy = -4 \cdot 20 + 0.1 \cdot 60 \cdot 20 = -80 + 120 = +40$

Le vecteur vitesse, au point M, est donc $(-60, +40)$ qui est tangent à la trajectoire, donc à la courbe de niveau de H.

4. Vérifier que le produit scalaire du vecteur gradient de H en un point (x, y) et du champ de vecteur (x', y') donné par le système dynamique de Lotka-Volterra est nul. Qu'en deduisez-vous ?

$\text{Grad } H(M) \cdot (x', y') = (-0.033\ldots, -0.05) \cdot (-60, +40)$

$= +0.033\ldots \cdot 60 - 0.05 \cdot 40 = 2 - 2 = 0$

Les vecteurs Grad $H(M)$ et (x', y') sont donc perpendiculaires.

NB : pour observer ce résultat, il est essentiel que les axes soient orthonormés (mêmes unités sur les deux axes).