NOM : Corrigé Date : 17 - 21 Octobre 2011 .
PRENOM : Groupe : .

Mathématiques Appliquées à la Biologie : Feuille-réponses du TD 5
Modèle logistique

La chenille de l'épicéa est un insecte ravageur des sapins baumiers d'Amérique du nord dont la dynamique peut être représentée par l'équation différentielle

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0.3y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{9000}\right) \tag{1}$$

où $y(t)$ désigne la taille de la population à l'instant t (on néglige ici la pression exercée sur la population de chenilles par son principal prédateur).

1. Pouvez-vous dire quelle est la capacité biotique de cette population, selon ce modèle ?

L'équation est de la forme $y' = ry(1 - y/K)$ où la capacité biotique $\boxed{K = 9000}$

2. On sait que la solution de cette équation différentielle de condition initiale $y(0)$ est de la forme $y(t) = \frac{9000y(0)}{y(0)+(9000-y(0))e^{-0.3t}}$. Précisez quelle est cette solution (en simplifiant son expression) lorsque la condition initiale vaut 200, puis calculer sa valeur aux temps $t = 10$ et $t = 20$.

$y(0) = 200$ donc $\boxed{y(t) = \frac{9000 \times 200}{200 + (9000 - 200)e^{-0,3t}} = \frac{18000}{2 + 88\, e^{-0,3t}}}$

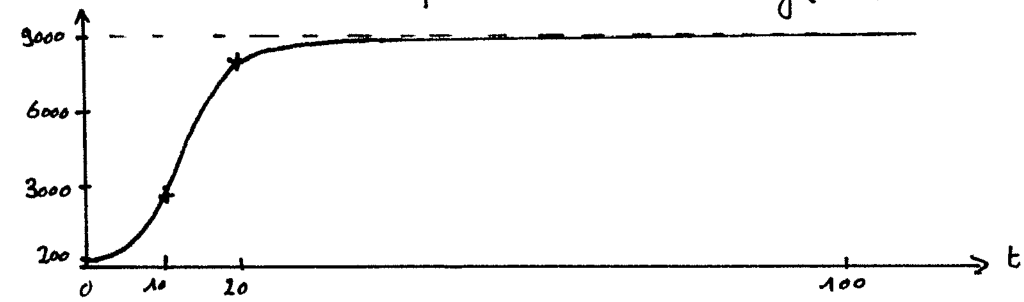
$y(10) = \frac{18000}{2 + 88\, e^{-3}} \simeq \frac{18000}{2 + 88 \times 0,0498} \simeq 2821$

$y(20) = \frac{18000}{2 + 88\, e^{-6}} \simeq \frac{18000}{2 + 88 \times 0,0025} \simeq 8115$

en arrondissant à l'entier le plus proche

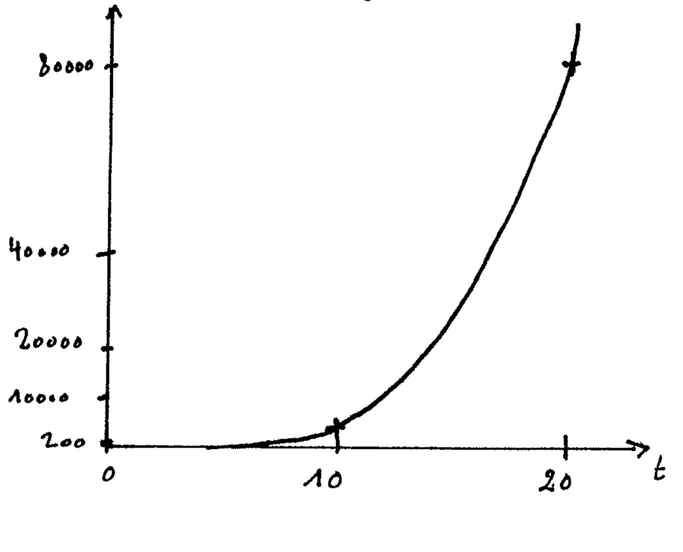
3. Donner, sans calcul, une valeur approchée de cette solution en $t = 100$ et esquissez son graphe.

$e^{-0,3 \times 100} = e^{-30}$ est très proche de 0 donc $y(100) \simeq 18000/2 = 9000$



4. Si, au lieu de choisir le modèle (1), on avait préféré un modèle malthusien $y'(t) = 0.3y(t)$, quelle serait, dans ce cas, la solution $y(t)$? Calculer sa valeur aux temps $t = 10$ et $t = 20$ et esquisser le graphe de cette solution.

On aurait alors $y(t) = y(0)\, e^{0,3t} = 200\, e^{0,3t}$ donc $y(10) = 200\, e^{3} \simeq 4017$
et $y(20) = 200\, e^{6} \simeq 80686$



On a un modèle malthusien donc une croissance exponentielle de la population

5. Comparez la valeur atteinte par la population de chenilles pour des temps grands dans le modèle (1) et dans le modèle malthusien. Qu'en pensez-vous ?

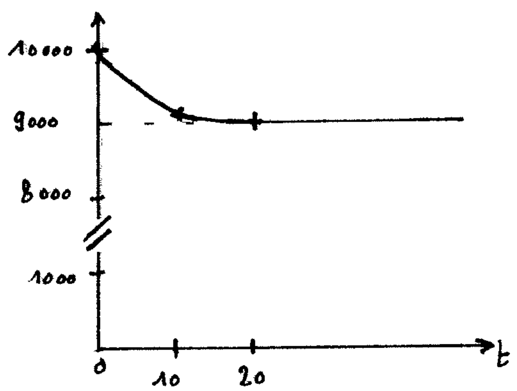
Pour $t = 100$ $y(100) \simeq 9000$ dans le modèle (1) alors que pour le modèle malthusien $y(100) \simeq 2{,}137 \times 10^{15}$ soit 2137 millions de milliards !
Le modèle malthusien donne une croissance exponentielle de la population, pour les temps grands il donne des effectifs qui n'ont plus de signification réaliste.

6. Reprendre les questions précédentes (à partir de la question 2) lorsqu'on suppose la population initiale égale à 10000 (et non 200).

$y(0) = 10000$ donc $y(t) = \dfrac{9000 \times 10000}{10000 + (9000 - 10000)e^{-0,3t}} = \boxed{\dfrac{90000}{10 - e^{-0,3t}}}$

$y(10) = \dfrac{90000}{10 - e^{-3}} \simeq 9045$ et $y(20) = \dfrac{90000}{10 - e^{-6}} \simeq 9002$

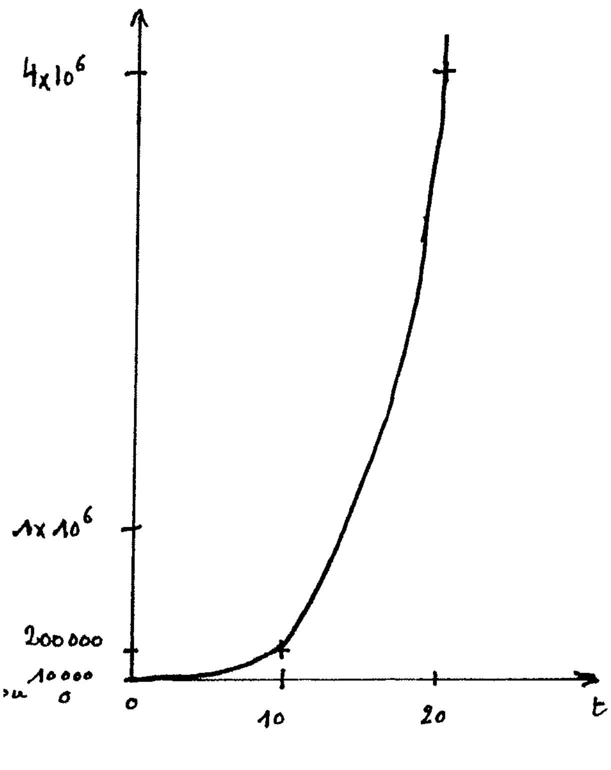
Comme $e^{-0,3 \times 100}$ est très proche de 0 $y(100) \simeq \dfrac{90000}{10} = 9000$



La solution décroît en partant d'une population de 10000 en $t = 0$
En $t = 20$ on est déjà pratiquement à la valeur limite 9000

Si on prend un modèle malthusien on a $y(t) = y(0)e^{0,3t} = 10000\, e^{0,3t}$

D'où $y(10) \simeq 200855$ $y(20) \simeq 4\,034\,288$ et $y(100) \simeq 106{,}865 \times 10^{15}$



On a une croissance exponentielle de la population et des effectifs irréalistes lorsque le temps devient grand.

Remarque : l'échelle sur l'axe verticale est telle qu'on ne peut pas distinguer 10 000 de 0 en $t = 0$.