Université de Nice
NOM :
PRENOM :

Année 2011-2012
Date : semaine du 5 mars 2012
Groupe : .

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : TD 5

Exercice 1. : On considère la dynamique suivante de deux populations en compétition

$$\begin{cases} x'(t) &= (10 - y(t) - 0.5x(t))x(t) \\ y'(t) &= (10 - 0.3x(t) - 0.5y(t)y(t) \end{cases} \tag{1}$$

1. Vérifier que le point $(0, 20)$ est bien un équilibre du système.

On a $x' = (10 - 20 - 0{,}5 \times 0) \times 0 = 0$

et $y' = (10 - 0{,}3 \times 0 - 0{,}5 \times 20) \times 20 = (10 - 10) \times 20 = 0$

Donc $(0, 20)$ est bien un équilibre

2. Calculer les deux dérivées partielles des fonctions $f(x, y) = (10 - y - 0.5x)x$ et $g(x, y) = (10 - 0.3x - 0.5y)y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 10 - y - 0{,}5x - 0{,}5x = 10 - y - x$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x$

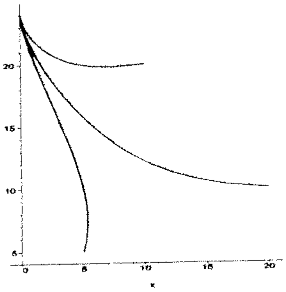
$\frac{\partial g}{\partial x} = -0{,}3y \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -0{,}5 \times y + 10 - 0{,}3x - 0{,}5y = 10 - 0{,}3x - y$

3. Calculer la matrice jacobienne $A(x, y)$ du système en ce point d'équilibre.

$A = \begin{pmatrix} 10 - y - x & -x \\ -0{,}3y & 10 - 0{,}3x - y \end{pmatrix}$ donc au point $(x, y) = (0, 20)$

on a $A = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ -6 & -10 \end{pmatrix}$

4. Déduire de la question précédente la nature de ce point d'équilibre. puis vérifier que ce résultat est compatible avec l'allure des trajectoires évoquée par la figure ci-dessous.



$\det A = 100 \quad \mathrm{tr}(A) = -20 \quad \frac{1}{4}\mathrm{tr}A^2 = 100$

On a $\frac{1}{4}\mathrm{tr}A^2 = \det A$ et $\mathrm{tr}A < 0$

C'est un noeud stable

Exercice 2. : On reprend le modèle (TD1) d'une population de renards et d'une population de lapins se partageant un même territoire. On rappelle l'équation de leur dynamique :

$$\begin{cases} \frac{dL(t)}{dt} &= 2L(t) - 0,1L(t)R(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= -30R(t) + 0,05L(t)R(t) \end{cases} \qquad (2)$$

Vérifier que l'unique équilibre pour lequel les deux populations coexistent est un centre.

$A = \begin{pmatrix} 2-0,1R & -0,1L \\ 0,05R & -30+0,05L \end{pmatrix}$ donc au point $(L,R) = (600,20)$

on a $A = \begin{pmatrix} 0 & -60 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $\det A = 60 > 0$ et $\operatorname{trace} A = 0$

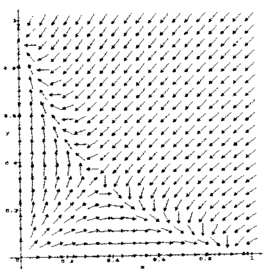
Le point $(600,20)$ est bien un centre

Exercice 3. : On reprend le champs de vecteurs modélisant deux espèces en compétition étudié au TD3 :

$$\begin{cases} x' &= (1-x-2y)x \\ y' &= (1-2x-y)y \end{cases} \qquad (3)$$

Déterminer la nature des quatres points d'équilibre de ce système.

coexistence improbable: extinction de l'une des deux especes



La matrice jacobienne est

$$A = \begin{pmatrix} 1-2x-2y & -2x \\ -2y & 1-2x-2y \end{pmatrix}$$

<u>en $(0,0)$</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det A = 1$ $\operatorname{trace} A = 2$ on a $\det A = (\operatorname{trace} A)^2/4$

$(0,0)$ peut être un noeud ou une spirale instable. Le dessin permet de voir qu'il s'agit d'un noeud instable.

<u>en $(0,1)$</u> $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ $\det A = 1$ $\operatorname{trace} A = -2$ on a $\det A = (\operatorname{trace} A)^2/4$

$(0,1)$ peut être un noeud ou une spirale stable. Le dessin permet de voir qu'il s'agit d'un noeud stable.

<u>en $(1,0)$</u> $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\det A = 1$ $\operatorname{trace} A = -2$ noeud stable

<u>en $(1/3, 1/3)$</u> $A = \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$ $\det A = -1/3$ c'est un col