

NOM :
PRENOM :

Groupe :

Date : 24 - 28 Octobre 2011 .

Mathématiques Appliquées à la Biologie : Feuille-réponses du TD 6
Equations différentielles

Exercice 1. :

Soit l'équation différentielle $y' = 2y - 5e^{-t}$.

1. Trouver une solution particulière de la forme $y(t) = Ae^{-t}$.

2. En déduire la solution générale de l'équation.

3. Trouver la solution de condition initiale $y(0) = \frac{1}{2}$ et calculer sa valeur à l'instant $t = \frac{1}{10}$.

Exercice 2. : On modélise l'évolution de la population des baleines de l'océan atlantique par la dynamique suivante :

$$y' = 0,08y\left(1 - \frac{y}{400000}\right).$$

1. De quel type de modèle s'agit-il ? Que représentent les constantes 0,08 et 400000 ?

2. A l'issue d'une longue période de surexploitation, on estime que l'effectif de cette population de baleine est tombé à 60000. En supposant qu'on interdit alors son exploitation, calculer, au moyen de la méthode d'Euler, une approximation de son évolution y_0, y_1, y_2, \dots en prenant un pas de temps $h = 1$. On rappelle que la méthode d'Euler pour l'équation $y' = f(y)$ s'écrit :

$$\begin{cases} t_n &= t_{n-1} + h \\ y_n &= y_{n-1} + hf(y_{n-1}). \end{cases} \quad (1)$$

Indiquer votre réponse puis présenter succinctement les calculs qui vous y ont conduit :

$$y_0 = 60000 \quad , \quad y_1 = \dots\dots\dots \quad , \quad y_2 = \dots\dots\dots$$

3. Que pouvez-vous dire de $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$?

4. On suppose que l'on autorise un quota de pêche de $h = 3000$, c'est-à-dire que la dynamique est alors

$$y' = 0,08y\left(1 - \frac{y}{400000}\right) - 3000.$$

Indiquer quels sont les équilibres de cette dynamique et préciser leur stabilité.

5. Qu'advient-il à la population de baleines dans ce cas (et selon ce modèle) sachant que $y(0) = 60000$?

6. Reprendre les 2 dernières questions en supposant cette fois qu'au delà du quota légal les activités de pêche illicites portent le prélèvement sur la ressource de 3000 à 5000.