

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 6
Un modèle simplifié du switch génétique

On considère un système de 2 gènes de niveau d'expression x et y respectivement, ayant la dynamique suivante :

$$\begin{cases} x' &= f(y) - \lambda x \\ y' &= f(x) - \mu y \end{cases} \quad (1)$$

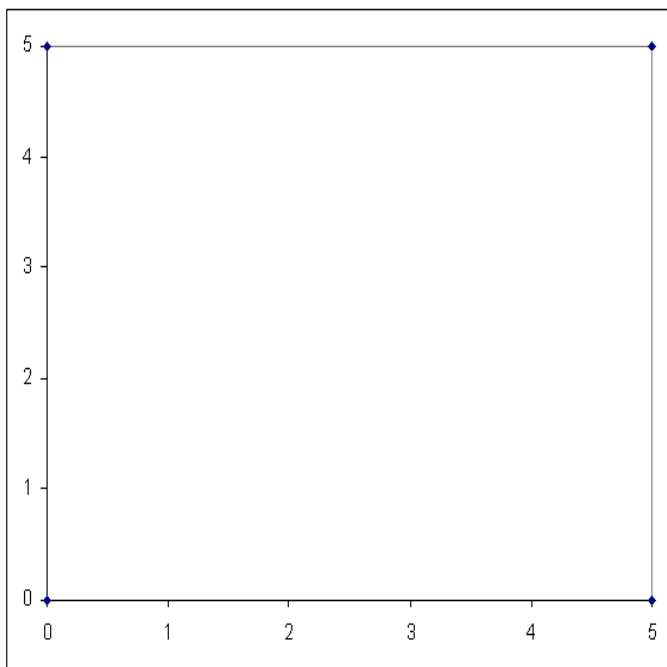
où f est une fonction en escalier qui modélise l'inhibition de chaque gène sur l'autre gène et où λ et μ sont des coefficients de dégradation que l'on supposera égaux à 1 pour simplifier. On suppose que $f(y)$ vaut 5 si $0 \leq y < 1$ et 0 si $1 \leq y < 5$.

1. Tracer le graphe de la fonction f et indiquer que vaut le système différentiel (1) dans le rectangle $1 \leq x < 5, 0 \leq y < 1$

$$\begin{cases} x' &= \dots\dots\dots \\ y' &= \dots\dots\dots \end{cases} \quad (2)$$

2. Vérifier que ses solutions sont de la forme $(x(t) = 5 + ce^{-t})$ et $y(t) = de^{-t}$ où c et d sont des constantes et en déduire que les trajectoires sont des droites d'équation $y = \frac{d}{c}(x - 5)$.

3. Tracer ci-dessous, en restant dans le rectangle, quelques unes de ces trajectoires.



4. Vérifier que toutes les trajectoires tendent vers le point $(5,0)$ qui est un équilibre de type noeud attractif (appelé le point focal du rectangle).

5. Indiquer ce que vaut le système différentiel (1) dans le carré $0 \leq x < 1$, $0 \leq y < 1$ et vérifier que ses solutions sont de la forme $(x(t) = 5 + ce^{-t}$ et $y(t) = 5 + de^{-t})$, où c et d sont des constantes.

$$\begin{cases} x' &= \dots\dots\dots \\ y' &= \dots\dots\dots \end{cases} \quad (3)$$

6. En déduire que les trajectoires dans ce carré ont aussi un point focal vers lequel elles tendent et tracer, en restant dans le carré, quelques unes de ces trajectoire dans la figure ci-dessus.

7. Tracer les graphes $t \rightarrow x(t)$ et $t \rightarrow y(t)$ des deux composantes de la trajectoire issue du point $(x_0 = 0.5, y_0 = 0)$.

8. Reprendre les questions précédentes pour le rectangle et la carré restant et compléter le tracé des trajectoires dans la figure ci-dessus.

9. Voyez-vous pour quelle raison ce modèle porte le nom de switch ?