Université de Nice
Département de Mathématiques
NOM :
PRENOM :

L3MASS et L3 Maths, année 2017-2018
Systèmes Dynamiques

Date :
Groupe :

corrigé

Feuille-réponse 2
Étude qualitative d'équations différentielles en dimension 1

1 Exercices sur table : Dynamique d'une population de bactéries.

Exercice 1. : On modélise la dynamique d'une population de bactéries responsable d'une maladie des conifères par l'équation différentielle :

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0,2y^2(t) \tag{1}$$

(t exprimé en mois et $y(t)$ en dizaine de mille).

1. Expliquer pourquoi toutes les solutions de cette équation (1) sont croissantes.

Si $y(t)$ est une solution, sa dérivée $y'(t)$ vaut $0.2\,y^2(t)$ et elle est donc positive. Donc $y(t)$ est une fonction croissante.

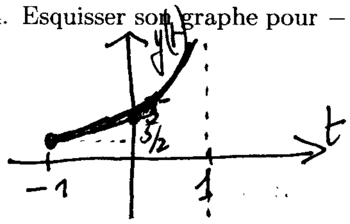
2. Montrer que $y(t) = \frac{5}{1-t}$ est une solution de l'équation différentielle (1).

On a : $y'(t) = \left(\frac{5}{1-t}\right)' = \frac{-(-5)}{(1-t)^2} = \frac{5}{(1-t)^2}$
et aussi $0.2\,y(t)^2 = 0.2\,\frac{5^2}{(1-t)^2} = \frac{5}{(1-t)^2}$ } quantités égales
Donc $y(t) = \frac{5}{1-t}$ est une solution de (1)

3. Quelle est sa valeur y_0 à l'instant initial $t_0 = 0$?

$y_0 = y(0) = \frac{5}{1-0} = 5$

4. Esquisser son graphe pour $-1 < t \leq 1$. Quel est le domaine de définition de cette solution ?



Le domaine de définition est $]-\infty, 1[$
C'est le plus grand intervalle (borné ou non) contenant $t=0$.

Exercice 2. : Usage d'un bactéricide

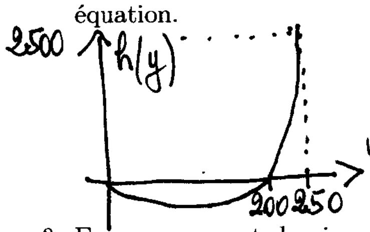
On lutte contre cette maladie en utilisant un traitement qui induit un taux de mortalité de 40 (pour 10 000) :

1. Expliquer pourquoi ceci peut être modélisé par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0,2y(t)^2 - 40y(t).$$

En l'absence de traitement le taux de croissance est $0.2\,y(t)^2$. Avec le traitement ce taux est diminué d'un terme de mortalité qui, selon ce modèle, est de 40 pour 10 000. Comme $y(t)$ est exprimé en dizaine de mille, ce terme est $40\,y(t)$.

2. Tracer l'allure du graphe de la fonction $h(y) = 0,2y^2 - 40y$ pour $y \in [0, 250]$ qui définit cette équation.



C'est un polynôme de degré 2 qui s'annule en $y = 0$ et $y = 200$.
$h(250) = 2500$

3. En vous servant du signe de cette fonction h, prévoir le comportement de cette population de bactéries selon sa taille initiale $y_0 = y(0)$. On distinguera successivement les cas $y_0 = 0$, $0 < y_0 < 200 = 0$, $y_0 = 200$ et $y_0 > 200$.

- si $y_0 = 0$, alors $h(0) = 0$ donc $y(t) = 0$ est un équilibre
- si $0 < y_0 < 200$, alors $h(y) < 0$ donc $y(t)$ est décroissante et tend vers 0 quand $t \to \infty$
- si $y_0 = 200$, alors $h(200) = 0$ donc $y(t) = 200$ est un équilibre
- si $y_0 > 200$, alors $h(y) > 0$ donc $y(t)$ est croissante et tend vers $+\infty$ quand $t \to \infty$.

4. Expliquer pourquoi le traitement ne pourra être efficace que si $y_0 < 200$.

Si $y \geq 200$, la solution $y(t)$ est constante ou croissante donc le traitement est inefficace.
Par contre si $y_0 < 200$, $y(t) \searrow$ donc le traitement marche.

5. Que faudrait-il faire, à votre avis, si l'on avait $y_0 = 201$.

N'appliquer ce traitement qu'après avoir trouvé un moyen de diminuer la population jusqu'en dessous de 200. Ou bien trouver un autre traitement, plus puissant (par exemple avec un taux de mortalité de 50/10000

6. Discuter la stabilité des équilibres.

On calcule $h'(y) = 0.4y - 40$
On trouve $h'(0) = \underbrace{-40}_{<0}$ donc 0 est un équilibre stable
et $h'(200) = 0.4(200) - 40 = \underbrace{40}_{>0}$ donc 200 est un équil. instable.

2 Exercices sur machine : Approche au moyen de Scilab

Exercice 3. : Révisions de Scilab

Rappelons ci-dessous quelques instructions Scilab utilisées la dernière fois, et donnons quelques précisions suplémentaires : derrière //, le texte n'est pas compilé mais considéré comme du commentaire.

```
clear;// reinitialise toutes les variables
r=0.5;K=100; //donne des valeurs aux constantes r et K
function ffff=fonc(y); //à droite le nom de la fonction
ffff=r*y.*(1-y/K)// à gauche le nom d'une variable locale ffff
endfunction;//(que l'on appelle comme on veut)
yy=0:0.1:K;// yy est donc une liste de valeurs, de 0 a K par pas=0.1
xset("window",1);// ouvre une nouvelle fenêtre graphique, de numéro 1
plot(yy,fonc(yy));//courbe liant les points specifiés
```

1. Notez le ''produit pointé" .* dans la définition de la fonction. Il effectue le produit terme à terme de deux matrices de même type, alors que le produit * effectuerait le produit usuel de matrices.Pour mieux comprendre cette multiplication particulière .* , choisir yy=1:1:5 et indiquer ce que valent les quantités (1-yy/K) et yy.*(1-yy/K) dans ce cas. Commenter.

• $(1-yy/K) \rightarrow$ 0.99 0.98 0.97 0.96 0.95   ici K=100
Cela correspond à la différence terme à terme entre yy=(1 2 3 4 5) et $\left(\frac{1}{100}\ \frac{2}{100}\ \frac{3}{100}\ \frac{4}{100}\ \frac{5}{100}\right)$

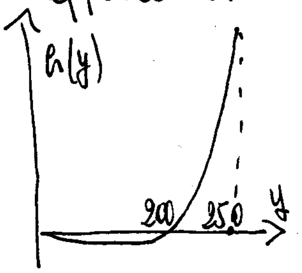
• $yy.*(1-\frac{yy}{K}) \rightarrow$ 0.99 1.96 2.91 3.84 4.75
Cela correspond au produit terme à terme de yy = (1 2 3 4 5) avec (0.99 0.98 0.97 0.96 0.95).

2. Pour les même valeurs de yy, indiquer ce que valent yy' et (1-yy/K)' et expliquer pourquoi il est possible de calculer (1-yy/K)*yy' mais pas (1-yy/K)*yy.

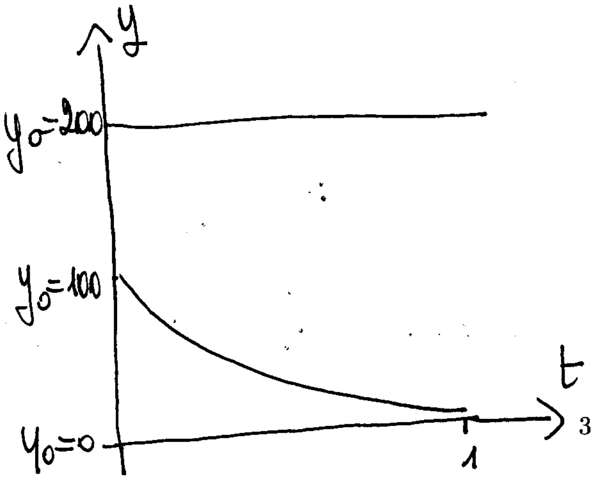
yy et (1-yy/K) sont 2 vecteurs ligne et yy' et (1-yy/K)' sont leur transposé (vecteurs colonne).
* est le produit de matrice (ou produit scalaire de vecteurs)
Donc (1-yy/K)*yy' est le produit d'une ligne par une colonne
On trouve 14.45.
Par contre (1-yy/K)*yy renvoie le message d'erreur "Multiplication incohérente" car ce sont 2 vecteurs ligne

3. En vous servant du code rappelé ici, tracer le graphe de la fonction $h(y)$ étudiée à la question 2 de l'exercice 2. Cela confirme-t-il votre tracé?

On retrouve effectivement le tracé (question 2, exercice 2)



4. En vous servant de l'instruction ode comme lors de la première séance, tracer 4 trajectoires de l'équation différentielle de l'exercice 2 correspondant aux 4 cas envisagés à la question 3 de cet exercice. Indiquer l'allure des trajectoires trouvées.



On trace facilement les 3 solutions issue de 0, 100 et 200. Par contre la sol issue de 201 explose si vite que l'on ne peut presque pas la tracer. Solution possible : réduire l'intervalle de temps [0 ; 0.01]

Exercice 4. : Explosion

1. Definir une function f(t,y) telle que les instructions suivantes donnent une représentatio graphique de la solution particulière $y(t) = \frac{5}{1-t}$ de l'équation (1)de l'exercice 1:

   tFinal=0.9;tt=0:0.01:tFinal;

   yy=ode(y0,0,tt,f)

   plot(tt,yy);

   Que trouvez-vous pour les deux quantités suivantes :

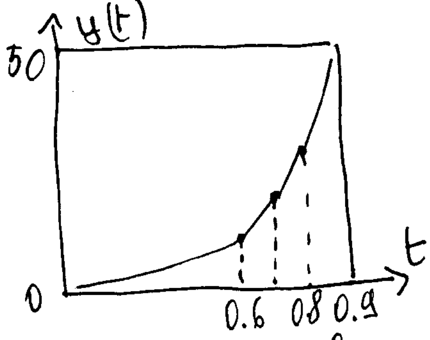
   $y(0.9) = \frac{5}{1-0.9} = \frac{5}{0.1} = 50$

   ode(y0,0,tFinal,f)= 50,0005804

2. Calculer la différence et commentez

   On trouve 0,0005804 qui est de l'ordre de 6.10^{-4} donc très petit (mais pas nul). La valeur approchée calculée par Scilab diffère légèrement de la valeur exacte (qui est 50)

3. Recommencez à tracer le graphe de la solution avec cette fois tt=0:0.1:tFinal; et expliquer la différence avec le graphe obtenu précédemment.



On obtient un graphe avec des coins visibles surtout à partir de 0.6

Pour les valeurs plus petites de t, la pente est suffisamment douce pour que le graphe semble lisse.

Recommencez votre dessin avec tFinal=0.99; puis avec tFinal=0.999;. Expliquer.

Pour tFinal = 0.99, on atteint des valeurs très grandes, de l'ordre de 500 et des valeurs plus grandes encore avec 0.999 (de l'ordre de 6000)

On sait que la solution exacte a un pole en t = 1 $y(t) = \frac{5}{1-t}$

Les valeurs très grandes sont le signe que $\lim_{t \to 1} y(t) = +\infty$ (explosion).