Université de Nice
Département de Mathématiques

L3MASS et L3 Maths, année 2017-2018
Systèmes Dynamiques

NOM : Date : .
PRENOM :

Feuille-réponses 4
Gestion d'une ressource renouvelable

Dans cet exercice on étudie une ressource renouvelable (par exemple des poissons) qui possède une dynamique de type logistique lorsqu'on ne l'exploite pas mais qui est soumise à une exploitation (par pêche par exemple) à un taux que nous allons supposer tout d'abord constant (égal à H) puis proportionnel à la taille de la ressource.

1 Exercices sur table

Exercice 1. : Limitation par quota de pêche
Si la taille de la ressource $y(t)$ évolue au cours du temps selon le modèle

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) - H \tag{1}$$

où $H > 0$ est une constante, comment choisir cette constante de telle sorte que l'exploitation de la ressource soit aussi rentable que possible sans pour autant conduire à son épuisement ?

1. Nous savons que le maximum de la fonction $f(y) = ry(1 - \frac{y}{K})$ est est aussi le taux de croissance maximum que la population peut atteindre. Combien vaut-il ? Expliquer.

2. Montrer que si $H > r\frac{K}{4}$, l'équation ne possède aucun équilibre (sauf 0), c'est-à-dire que quelque soit la taille $y(0)$ de la population initiale, celle-ci diminue jusqu'à son extinction.

3. Montrer, en vous aidant du graphe de $f - H$, qu'au contraire si $H < r\frac{K}{4}$, la dynamique présente deux équilibres y_1^* et y_2^*, vérifiant $0 < y_1^* < y_2^*$, le premier étant instable et le second stable.

4. Vérifier que, à condition que la taille initiale de la ressource soit supérieure à y_1^*, la population tend vers l'équilibre y_2^*, ce qui implique que, sous cette condition, la ressource est préservée puisqu'elle tend à se stabiliser à la valeur d'équilibre y_2^*.

Exercice 2 : Limitation par effort de pêche Notons que dans le modèle précédent, même si l'on s'efforce de ne pas *surexploiter* la ressource en imposant à H de ne jamais dépasser la valeur $r\frac{K}{4}$, la tentation est forte de choisir précisément pour H cette valeur limite (ou de s'en rapprocher au mieux) car c'est elle qui maximise la production et qui est donc le comportement le plus rentable parmi ceux qui n'épuisent pas la ressource. Mais si l'on examine la dynamique dans ce cas limite, on s'aperçoit que le moindre changement de paramètre risque alors de conduire à l'extinction. C'est ce constat qui a conduit le biologiste M.B. Schaefer en 1954 à proposé de limiter l'exploitation d'une telle ressource non pas en imposant un quota de pêche H à ne pas dépasser mais plutot en limitant *l'effort* de pêche E, effort que l'on peut par exemple mesurer par le nombre d'heures passées en mer pour les bateaux exploitant la ressource. Le taux de pêche est alors proportionnel à la taille de la ressource : d'autant plus faible qu'elle est petite et d'autant plus importante qu'elle est grande. Dans le modèle de Schaefer :

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) - Ey(t) \tag{2}$$

l'effort de pêche E apparaît simplement comme un taux de mortalité (par pêche) constant.

1. Tracer sur les graphes des fonctions $f_1(y) = ry(1 - \frac{y}{K})$ et $f_2(y) = Ey$ sur un même graphique (on supposera $0 \leq E \leq r$). Que représente l'abscisse et l'ordonnée de leur point d'intersection (autre que $(0,0)$) ? Pour quelle valeur de E son ordonnée est-elle maximale ?

2. Montrer l'existence d'un unique équilibre stable $y^* > 0$ vers lequel la population tend quelque soit sa valeur initiale $y(0)$ (sauf si elle est nulle).

3. Vérifier qu'au dela d'un certain effort $\overline{E}$ égal à $r/2$, une augmentation de l'effort ne s'accompagnera pas d'une augmentation de la production. On peut ainsi espérer de cette façon éviter plus surement le risque d'épuisement de la ressource.

4. On suppose que la population est stabilisée à sa valeur d'équilibre stable. On appelle *rendement durable maximal* (*maximal sustainable yield*) de cette population le taux de prélèvement par pêche (qui vaut ici Ey^*) maximal c'est-à-dire celui que l'on obtient en choisissant l'effort de pêche E pour lequel Ey^* est maximal. Calculer ce rendement durable maximal et montrer qu'il est égal au taux de croissance maximal que la population peut atteindre lorsqu'elle n'est pas soumise à la pêche. Cela peut-il se comprendre intuitivement ?

2 Exercices sur machine

1. On considère une population de poissons dont la dynamique est donnée par l'équation (1) avec $r = 0.08$ et $K = 400000$. On suppose que sa taille initiale est $y_0 = 60000$. Avec Scilab calculerl'évolution $y(t)$ de cette population pour des temps t, exprimés en mois, compris entre 0 et 120. Représenter ci-dessous son graphe $y(t)$ et indiquer sa taille à 1 an puis à 5 ans.

2. Considérant que cette population a été décimée par une longue surexploitation par pèche, on décide d'autoriser sa pèche à condition de respecter un quota H (taux de prélèvement maximal autorisé). Modifier le code Scilab de la question précédente pour calculer l'évolution $y(t)$ si $H = 2000$ (et toujours $y_0 = 60000$). Qu'observez-vous ? Expliquer.

3. Même question pour $H = 5000$. L'exploitation de la ressource est-elle durable dans ce cas ?

4. Vérifier que lorsque $H = 4080$, la ressource est à l'équilibre. Pouviez-vous le prévoir avec des calculs ? Pensez-vous que l'exploitation de la ressource est durable dans ce cas ?

5. On suppose cette fois que la dynamique est celle de l'équation (2) sans changer les valeurs des paramètres r et K et en choisissant un effort $E = 0.02$. Indiquer quelles commandes vous permettent de tracer le champ de vecteurs associé à cette dynamique.

6. Déduire de l'examen de ce champs de vecteurs quelle est la dynamique $y(t)$ de la population en fonction de la condition initiale y_0 ; en particulier préciser son évolution lorsque $y_0 = 60000$.

7. Définir avec Scilab une fonction qui calcule le *rendement durable maximal* dans le sens expliqué ci-dessus, en fonction de l'effort E. Est-ce une fonction monotone ? Expliquer.