Université de Nice
Département de Mathématiques
NOM :
PRENOM :

L3MASS et L3 Maths, année 2017-2018
Systèmes Dynamiques
Date : .

Feuille-réponse du TP5
Introduction aux systèmes différentiels

1 Exercices sur table

Exercice 1. : On considère le système de Lotka-Volterra suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 8x - 16xy \\ y' & = & -6y + 18xy \end{array}\right. \tag{1}$$

1. Quelle est la dynamique x des proies en l'absence de prédateur (dynamique intrinsèque). Donner la solution $x(t)$ en fonction de t et de $x_0 = x(0)$ dans ce cas. Rappelons qu'on appelle "malthusien" ce modèle de croissance.

2. Quelle est la dynamique y des prédateurs en l'absence de proie. Donner la solution $y(t)$ en fonction de t et de $y_0 = y(0)$ dans ce cas.

3. Tracer les deux droites sur lesquelles $x' = 0$ et de même les deux droites sur lesquelles $y' = 0$ puis indiquer dans chacunes des régions ainsi délimitées le sens du champ de vecteurs.

4. Combien y-a-t-il d'équilibres ? Quelles sont les coordonnées de l'équilibre $v^* = (x^*, y^*)$ qui n'est pas nul ? Représenter le sur le croquis ci-dessus.

Exercice 2. :

1. On remplace à présent le modèle de la dynamique intrinsèque des proies par le modèle logistique de capacité biotique K. Avec $K = 2$, on considère donc le nouveau système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & 0.8x(1 - x/2) - 1.6xy \\ y' & = & -0.6y + 1.8xy \end{array} \right. \tag{2}$$

Calculer et représenter dans un croquis du plan de phase, pour x et y positifs, les régions de monotonie des composantes de solutions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ comme à la question 3) ci-dessus.

2. Quelle est l'équilibre $v^* = (x^*, y^*)$ pour ce nouveau modèle ?

3. Devinette : quels pourraient être les comportements des solutions ?

2 Exercices au moyen de `Scilab`

La commande `ode(v0,t0,t,w)` de `Scilab` permet aussi de résoudre des systèmes d'équations différentielles tels que le système de Volterra-Lotka. Il convient simplement de réécrire

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & f(t, x, y) \\ y' & = & g(t, x, y) \end{array} \right. \tag{3}$$

sous forme vectorielle

$$v' = w(t, v) \tag{4}$$

en posant $v = (x, y)$ et $w(t, v) = (w_1(v_1, v_2), w_2(v_1, v_2))$.
la résolution numérique du système se fait au moyen des déclarations suivantes (observez que la fonction `w` doit impérativement faire apparaitre la variable `t`, même si le système ne dépend pas explicitement de cette variable) :

```
function f=f(x,y);f=8*x*(1-2*y);endfunction;
function g=g(x,y);g=-6*y*(1-3*x);endfunction;
function w=w(t,v);w=[f(v(1),v(2));g(v(1),v(2))];endfunction;
```

n° indent On peut représenter le *champ de vecteurs* associé par les commandes suivantes :

```
xx=0:0.2:2;yy=0:0.1:1;xset("window",1);fchamp(w,0,xx,yy);
```

On peut calculer puis tracer la *trajectoire* de la solution (x, y) issue de v_0 pour $t \in [0, 30]$

```
v0=[1.0;0.3];tt=0:0.02:30;
vv=ode(v0,0,tt,w);
xt=vv(1,:);yt=vv(2,:);xset("window",1);plot(xt,yt);
```

1. Quelle est la forme de la trajectoire obtenue et de quel point est-elle issue ?

2. On peut aussi représenter les deux coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de la solution (x, y) issue de v_0 :
   `xset("window",2);plot(tt,xt);plot(tt,yt);`
   Quels graphes obtenez-vous ? Pouvez-vous estimer la période T de ces deux fonctions ?

3. Quelle est la valeur (à 10^{-6} près) de la solution (x, y) à l'instant $t = 0.12$, puis à l'instant $t = 0.13$? Expliquez comment vous avez trouvé ces valeurs.

4. Quelle est l'amplitude de la composante x et celle de la composante y ? Expliquez comment vous avez fait pour calculer ces valeurs.

5. Calculer la valeur exacte de x pour laquelle y est minimal ou maximal ? Faire un croquis et expliquer.

6. De même pour la valeur exacte de y pour laquelle x est minimal ou maximal ? Représentez le point d'équilibre sur votre croquis.

7. Nous allons à présent étudier le comportement de la solution issue de v_0 lorsque la dynamique propre des proies n'est plus malthusienne mais logistique, avec une capacité biotique $K = 20$. Définir les fonctions `flogis` et `wlogis` en conséquence ; donner votre code ci-dessous.

8. Représentez la trajectoire de v_0 pour $t \in [0, 100]$ au moyen de
```
ttt=0:0.02:100;v0=[2.0;0.3];
vlogis=ode(v0,0,ttt,wlogis);
xset("window",1);fchamp(wlogis,0,xx,yy);
xlogist=vlogis(1,:);ylogist=vlogis(2,:);plot(xlogist,ylogist)
```
Qu'observez-vous ?

9. Recommencez avec `K=10;` puis `K=4;`. Qu'observez-vous ?