Université de Nice
Département de Mathématiques

L3MASS et L3 Maths, année 2013-2014

NOM :

PRENOM :

Date :

Groupe :

Feuille-réponse du TP5
Introduction aux systèmes différentiel

1 Exercices sur table

Exercice 1. : On considère le système de Lotka-Volterra (5.1) avec (5.2) pour valeur de constantes :

$$\begin{cases} x' = 0.8x - 0.4xy = f(x,y) \\ y' = -0.6y + 0.2xy = g(x,y) \end{cases} \quad (1)$$

1. Quelle est la dynamique x des proies en l'absence de prédateur (dynamique intrinsèque). Donner la solution $x(t)$ en fonction de t et de $x_0 = x(0)$dans ce cas. Rappelons qu'on appelle "malthusien" ce modèle de croissance.

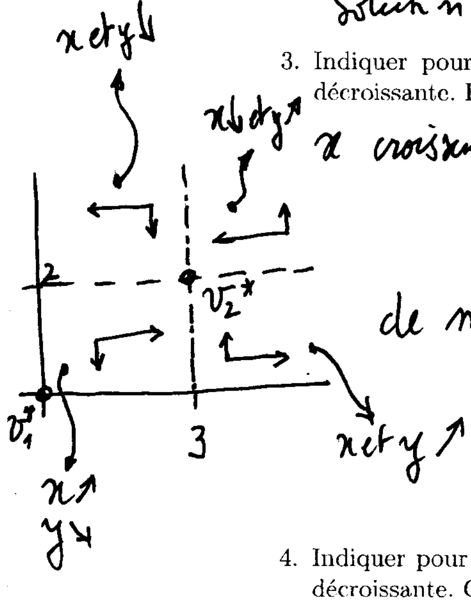
"L'absence de prédateurs" signifie que $y=0$ et donc $x' = 0.8x - 0$

On sait que la solution de cette équation differentielle est $x(t) = x_0 e^{0.8t}$

2. Quelle est la dynamique y des prédateurs en l'absence de proie. Donner la solution $y(t)$ en fonction de t et de $y_0 = y(0)$ dans ce cas.

Absence de proie $\Leftrightarrow x=0$, donc $y' = -0.6y + 0$

solution : $y(t) = y_0 e^{-0.6t}$



3. Indiquer pour quels (x,y) la population des proies est croissante et pour quels (x,y) elle est décroissante. Faire un croquis et expliquer.

x croissante $\Leftrightarrow x' > 0 \Leftrightarrow 0 < 0.8x - 0.4xy = 0.8x(1-y/2)$

comme $x \geq 0$, ceci revient à $1 - y/2 > 0 \Leftrightarrow y < 2$.

et de même x décroissante $\Leftrightarrow y > 2$

de même y croissante $\Leftrightarrow 0 < -0.6y + 0.2xy = -0.6y(1 - x/3)$

et donc y croissante $\Leftrightarrow 1 - x/3 < 0 \Leftrightarrow x > 3$

et y décroissante $\Leftrightarrow x < 3$

4. Indiquer pour quels (x,y) la population des prédateurs est croissante et pour quels (x,y) elle est décroissante. Compléter le croquis.

voir ci-dessus.

5. Quelle est l'équilibre $v^* = (x^*, y^*)$? Représenter v^* sur le croquis.

v^* équilibre $\Leftrightarrow f(v^*) = 0 = g(v^*)$

$$\begin{cases} 0.8x(1 - y/2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 2 \\ -0.6y(1 - x/3) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = 3 \end{cases}$$

Il y a donc deux équilibres

$v_1^* = (0,0)$

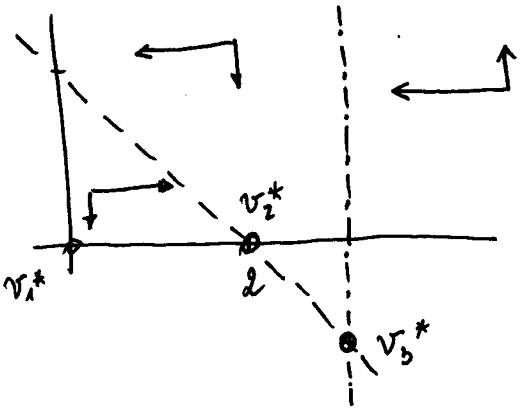
$v_2^* = (3,2)$

Exercice 2. :

1. On remplace à présent le modèle de la dynamique intrinsèque des proies par le modèle logistique de capacité biotique K. Avec $K = 2$, on considère donc le nouveau système d'équations

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 0.8x(1-x/2) - 0.4xy = 0.8x\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right) \\ y' & = & -0.6y + 0.2xy = -0.6y(1 - x/3). \end{array}\right. \quad (2)$$

Calculer et représenter dans un croquis du plan de phase, pour x et y positifs, les régions de monotonie des composantes de solutions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.



Pour x et y positif

x croissante $\Leftrightarrow 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} > 0$

$\Leftrightarrow y < -x + 2$

y croissante $\Leftrightarrow x > 3$ (voir 1.4)

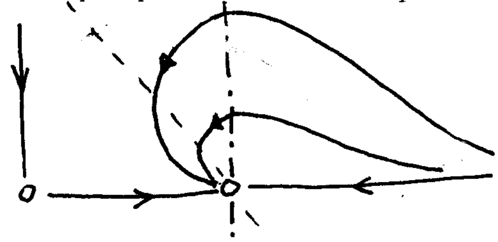
2. Quelle est l'équilibre $v^* = (x^*, y^*)$ pour ce nouveau modèle ?

$$\left\{\begin{array}{ll} 0.8x\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right) = 0 & \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 2 - x \\ -0.6y(1 - x/3) & \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = 3 \end{array}\right.$$

En partant de la 2e équation : Si $y = 0$ alors $x = 0$ ou $x = 2$ $\quad v_1^* = (0,0) \quad v_2^* = (2,0)$

Si $x = 3$ alors $y = 2 - 3 = -1$ $\quad v_3^* = (3,-1)$

3. Devinette : quels pourraient être les comportements des solutions ?



extinction des requins

2 Exercices au moyen de Scilab

La commande `ode(v0,t0,t,w)` de **Scilab** permet aussi de résoudre des systèmes d'équation différentielles telle que le système de Volterra-Lotka. Il convient simplement de réécrire

$$v' = w(t, v) \quad (3)$$

le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & f(t,x,y) \\ y' & = & g(t,x,y) \end{array}\right. \quad (4)$$

en posant $v = (x, y)$ et $w(t, v) = (w_1(v_1, v_2), w_2(v_1, v_2))$.

Observons que pour le système de Volterra-Lotka les fonction f et g ne dépendent par explicitement de la variable t ; la résolution du système (5.1) avec (5.2) pour valeur de constantes peut donc se faire au moyen des déclarations suivantes :

```
function f=f(x,y);f=0.8*x*(1-2*y);endfunction;
function g=g(x,y);g=-0.6*y*(1-3*x);endfunction;
function w=w(t,v);w=[f(v(1),v(2));g(v(1),v(2))];endfunction;
```

Observez que la fonction `w` doit impérativement faire apparaitre la variable `t`, même si le système ne dépends pas explicitement de cette variable.

On peut représenter le *champ de vecteur* associé au moyen des commandes :

```
xx=0:0.1:1;yy=0:0.1:1;
xset("window",1);fchamp(w,0,xx,yy);
```

On peut à présent calculer la *trajectoire* (courbe des valeurs) de la solution (x, y) issue de v_0 (pour $t \in [0, 15]$).

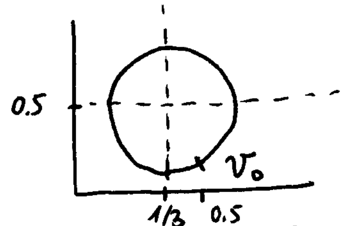
```
v0=[0.5;0.3];tt=0:0.01:15;
vv=ode(v0,0,tt,w);
xt=vv(1,:);yt=vv(2,:);
xset("window",1);plot(xt,yt);
```

On peut aussi représenter les deux fonctions coordonnées x et y de la solution (x, y) issue de v_0 :

```
xset("window",2);plot(tt,xt);plot(tt,yt);
```

1. Quel est le point v_0 choisi ?

Manifestement $v_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix}$



2. Quelle est la valeur (à 10^{-6} près) de cette solution à l'instant $t = 0.06$? Expliquez comment vous avez trouvé cette valeur.

$0{,}06 = tt(1+6)$ donc $\begin{pmatrix} x(0{,}06) \\ y(0{,}06) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5095573 \\ 0{,}3056068 \end{pmatrix}$

3. Quelle est la valeur (à 10^{-6} près) de cette solution à l'instant $t = 0.065$? Expliquez comment vous avez fait calculer cette valeur.

$t = 0{,}065$ n'est pas un des points de tt où la solution a été calculée et "rangé" dans la matrice M. On calcule donc cette valeur au moyen de ode(M0, 0, 0.065, w) et on obtient $\begin{pmatrix} x(0{,}065) \\ y(0{,}065) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5103494 \\ 0{,}3060530 \end{pmatrix}$

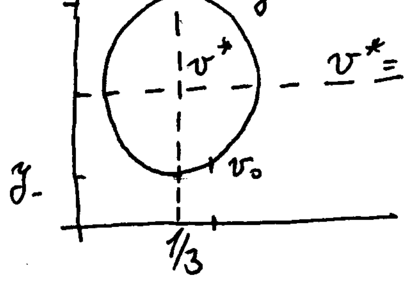
4. Quelle est l'amplitude approchée de la composante x et celle de la composante y ? Expliquez comment vous avez fait calculer ces valeurs.

Amplitude en $x = \mathrm{Max}\{x(t)\} - \mathrm{Min}\{x(t)\} \simeq \max(xt) - \min(\ )$
$= 0{,}6220715 - 0{,}1517099 = 0{,}4703616$

de même, Amplitude en $y \simeq 0{,}8648201 - 0{,}2558448 = 0{,}6089753$

5. Quelle est la valeur exacte de x lorsque y est minimal ou maximal ? Faire un croquis et expliquer.

Lorsque y est minimal (ou maximal) $y' = 0$
donc $0 = y' = g(x,y) = -0{,}6y(1-3x)$ donc $x = \frac{1}{3} = 0{,}333 = x^*$



$v^* = (x^*, y^*)$.

6. De même, quelle est la valeur exacte de y lorsque x est minimal ou maximal ? Représentez le point d'équilibre sur votre croquis.

De même si x est minimal (ou maximal) $x' = 0$
donc $0 = x' = f(x,y) = 0.8x(1-2y)$ donc $y = \frac{1}{2} = 0.5 = y^*$

7. Nous allons à présent étudier le comportement de la solution issue de v_0 lorsque la dynamique propre des proies n'est plus malthusienne mais logistique, avec population optimale $K = 10$. Définir les fonctions `flogis` et `wlogis` en conséquence ; donner votre code ci-dessous.

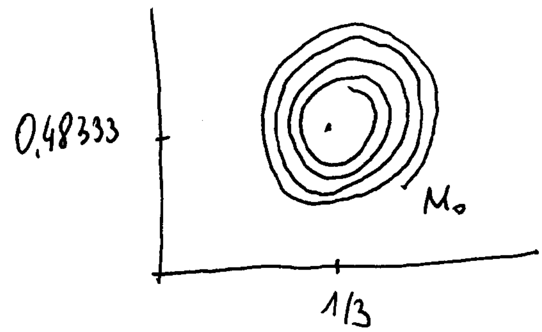
```
K=10;
function f= flogis(x,y); f=0.8*x*(1-x/K)-1.6*x*y; endfunction
function w= wlogis(t,v);
        w=[flogis(v(1),v(2)); g(v(1),v(2))]
endfunction;
```

8. Représentez la trajectoire de v_0 pour $t \in [0, 50]$ au moyen de

```
ttt=0:0.01:50;   v0=M0;
vlogis=ode(v0,0,ttt,wlogis);
xset("window",1);fchamp(wlogis,0,xx,yy);
xlogist=vlogis(1,:);ylogist=vlogis(2,:);
plot(xlogist,ylogist)
```

Qu'observez-vous ?

La solution issue de M_0 s'enroule vers l'équilibre



9. Recommencez avec `K=5;` puis `K=2;`. Qu'observez-vous ?

Lorsqu'on diminue K l'équilibre a son ordonnée qui diminue et la solution s'enroule plus rapidement vers cet équilibre.

10. Toujours avec `K=2;` tracez à présent la solution issue de v_0 =`v0=[1.2;0.3]`. Qu'observez-vous ?

Cette nouvelle solution s'enroule également vers ce même équilibre.