Université de Nice
Département de Mathématiques
L3MASS et L3 Maths, année 2017-2018
Systèmes Dynamiques

NOM : Date : .
PRENOM : .

Feuille-réponse du TP6
Systèmes différentiels linéaires

1 Exercices sur table

Exercice 1. :

1. On considère le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= 2y \end{cases} \tag{1}$$

Donner la solution $(x(t), y(t))$ en fonction de $(x_0, y_0) = (x(0), y(0))$ et t. En déduire que pour toute solution sa *trajectoire* $\gamma = \{(x(t), y(t)), t \in \mathbb{R}\}$ vérifie $y = Cx^2$. Préciser la valeur de C en fonction de x_0 et y_0.

2. Esquisser l'ensemble des trajectoires du système (1). Préciser par des flèches le sens de parcours de ces trajectoires.

3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$. Montrer que les vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de cette matrice. Indiquer quelles sont les valeurs propres correspondantes.

4. On considère à présent le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} X' &= 1.5X - 0.5Y \\ Y' &= -0.5X + 1.5Y \end{cases} \tag{2}$$

On pose $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$. Le système (2) s'écrit donc aussi $V' = AV$ (assurez-vous en en calculant AV). Montrer que $V(t) = ae^tV_1 + be^{2t}V_2$ est solution. En déduire les solutions du système (2).

5. On pose $v_1(t) = ae^t$ et $v_2(t) = be^{2t}$ (et donc $V(t) = v_1(t)V_1 + v_2(t)V_2$) Montrer que $v_2(t) = Kv_1^2(t)$; exprimer K en fonction de a et b.

6. En déduire une esquisse de l'ensemble des trajectoires du système (2). Préciser par des flèches le sens de parcours de ces trajectoires.

7. **Un cas général.** On considère un système différentiel linéaire $W' = BW$, où B est une matrice admettant deux vecteurs propres indépendants W_1 et W_2 de valeurs propres respectives λ_1 et λ_2. On pose $w_1(t) = ae^{\lambda_1 t}$ et $w_2(t) = be^{\lambda_2 t}$. Montrer que $W(t) = w_1(t)W_1 + w_2(t)W_2$ est solution de ce système.

8. Montrer que $w_2(t) = Cw_1(t)^n$, en précisant les valeurs de C et n en fonction de λ_1, λ_2, a et b.

9. **Cas de vlp complexes.** On suppose que $\lambda_1 = \alpha + i\omega$ et $\lambda_2 = \alpha - i\omega$, et que $W_1 = \begin{pmatrix} 3-2i \\ 1-i \end{pmatrix}$ et que $W_2 = \begin{pmatrix} 3+2i \\ 1+i \end{pmatrix}$. On suppose que a et b sont des nombres réels ; Calculer $\mathrm{Re}\,(W(t))$ et $\mathrm{Im}\,(W(t))$. [1].

10. Si $\alpha < 0$ que pouvez-vous dire du comportement des solutions du système $W' = BW$?

1. Rappel : $e^{\alpha t + i\omega t} = e^{\alpha t}e^{i\omega t} = e^{\alpha t}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))$; à noter qu'on a bien encore $\frac{d}{dt}e^{(\alpha+i\omega)t} = (\alpha + i\omega)e^{(\alpha+i\omega)t}$.

2 Exercices au moyen de `Scilab`

Nous avons vu dans les exercices précédent quel est le rôle des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice associée à un système différentiel. La commande `spec` permet de trouver les valeurs propres (sous forme des éléments diagonaux d'une matrice) et des vecteurs propres (sous forme des vecteurs colonnes d'une matrice).

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1.5 & 0.5 \\ 0.5 & -1.5 \end{pmatrix}$. Saisir la matrice A dans `Scilab` au moyen de la commande `A=[-1.5,0.5;0.5,-1.5];` Determiner et donner ses valeurs propres et deux vecteurs propres associés, au moyen de la commande `[vcp,vlp]=spec(A)`

2. On considère le système différentiel associé

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & f(x,y) \\ y' & = & g(x,y) \end{array} \right. \tag{3}$$

   Définir la fonction `Scilab f(x,y)` par la commande
   `function f=f(x,y); f=A(1,1)*x+A(1,2)*y endfunction;`
   De même, définir et donner ici, la fonction `Scilab g(x,y)`, puis définir la fonction `Scilab w(t,u)` adaptée à son utilisation dans `fchamp` et `edo` (voir TP5).

3. Les commandes suivantes permettent d'esquisser le champ associé et de représenter des trajectoires du système différentiel (3) issues de $[-3,+3]^2$.

```
xmin=-3;ymin=-3;xmax=3;ymax=3;
xx=xmin:0.5:xmax;yy=ymin:0.3:ymax;
xset("window",1);fchamp(w,0,xx,yy)
tt=0:0.01:5;
for numerotraj=1:100
 M0=[-3+6*rand();-3+6*rand()];
 M=ode(M0,0,tt,w);
 xt=M(1,:);yt=M(2,:);
 plot(xt,yt);
end;
```

   Combien de trajectoires ont été tracées ? Comment ont-elles été choisies ? Esquisser ci-dessus à droite le tracé que vous observez. Marquer l'équilibre $(0,0)$ ainsi que les directions propres trouvées ci-dessus. Indiquer le sens de parcours des trajectoires. Esquisser la trajectoire issue de $(3,3)$. Comment s'appelle ce comportement dans la classification de Poincaré ?

4. On considère à présent le système différentiel associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$ Quelles sont ses valeurs propres ? Comment s'appelle, dans la classification de Poincaré, le comportement du système ? Indiquer les directions propres.

5. Réexecutez le programme de tracé des solutions avec cette nouvelle matrice A. Qu'observez-vous ? Comment expliquez-vous ce phénomène ?

6. La commande `plot2d` permet de limiter les tracés aux points situés dans un rectangle. Si l'on pose `bornes=[xmin,ymin,xmax,ymax];`, il suffit de remplacer `plot(xt,yt);` par `plot2d(xt,yt,rect=bornes);`. Faites cette modification et esquissez ci-dessous ce que vous observez, en ajoutant les directions propres et le sens de parcours des trajectoires.

7. On considère à présent le système différentiel associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ Refaire la même étude (spectre, classification de Poincaré, tracé des trajectoires orientées et des directoires propres) pour ce système.

8. On considère enfin le système différentiel associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$. Comment s'appelle, dans la classification de Poincaré, le comportement de ce système ? Esquissez ci-dessous le comportement des trajectoires, en précisant leur sens de parcours.