Université de Nice
Département de Mathématiques

L3MASS et L3 Maths, année 2013-2014

NOM : Date : .

PRENOM : Groupe : .

Feuille-réponse du TP6
Systèmes différentiels linéaires

1 Exercices sur table

Exercice 1. :

1. On considère le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 4y \end{cases} \tag{1}$$

Donner la solution $(x(t), y(t))$ en fonction de $(x_0, y_0) = (x(0), y(0))$ et t. En déduire que pour toute solution sa *trajectoire* $\gamma = \{(x(t), y(t)), t \in \mathbb{R}\}$ vérifie $y = Cx^2$. Préciser la valeur de C en fonction de x_0 et y_0.

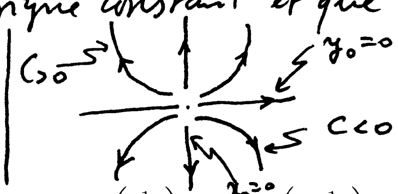
On sait que $x' = 2x$ a pour solution $x(t) = x_0 e^{2t}$ et $y' = 4y$ a $y(t) = y_0 e^{4t}$

On en déduit que $y(t) = y_0 e^{4t} = y_0 (e^{2t})^2 = \frac{y_0}{x_0^2}(x_0 e^{2t})^2 = C\, x(t)$ avec

$C = \frac{y_0}{x_0^2}$

2. Esquisser l'ensemble des trajectoires du système (1). Préciser par des flèches le sens de parcours de ces trajectoires.

On en déduit que $x(t)$ et $y(t)$ sont de signe constant et que $\gamma = \{(x(t), y(t)), t \in \mathbb{R}\}$ est contenue dans une parabole d'équation $y = Cx^2$



3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que les vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de cette matrice. Indiquer quelles sont les valeurs propres correspondantes.

On a $AV_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2V_1$ et $AV_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4V_2$

Donc V_1 est vecteur propre (vep) de valeur propre (vlp) $\lambda = 2$ et V_2 est vep de vlp $\mu = 4$

4. On considère à présent le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} X' = 3X - Y \\ Y' = -X + 3Y \end{cases} \tag{2}$$

On pose $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$. Le système (2) s'écrit donc aussi $V' = AV$ (assurez-vous en !). Montrer que $V(t) = ae^{2t}V_1 + be^{4t}V_2$ est solution. En déduire les solutions du système (2).

$AV = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3X - Y \\ -X + 3Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = V'$

$AV(t) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}(ae^{2t}V_1 + be^{4t}V_2) = ae^{2t}\underbrace{AV_1}_{2V_1} + be^{4t}\underbrace{AV_2}_{4V_2}$

$= ae^{2t}\,2V_1 + be^{4t}\,4V_2$ puisque V_1 et V_2 sont des vep

$= (ae^{2t})'V_1 + (be^{4t})'V_2 = (ae^{2t}V_1 + be^{4t}V_2)' = V'(t)$

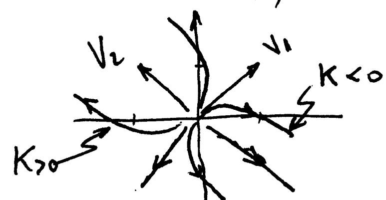
ce qui montre que $t \mapsto V(t)$ est bien solution de (2).

5. On pose $v_1(t) = ae^{2t}$ et $v_2(t) = be^{4t}$ (et donc $V(t) = v_1(t)V_1 + v_2(t)V_2$) Montrer que $v_2(t) = Kv_1^2(t)$; exprimer K en fonction de a et b.

$$v_2(t) = b e^{4t} = b\left(e^{2t}\right)^2 = \frac{b}{a^2}\left(a e^{2t}\right)^2 = \frac{b}{a^2} v_1^2(t) = K v_1^2(t) \text{ avec } K = \frac{b}{a^2}$$

6. En déduire une esquisse de l'ensemble des trajectoires du système (2). Préciser par des flèches le sens de parcours de ces trajectoires.

La question (5.) montre que $v_1(t)$ et $v_2(t)$ sont les coordonnées de $V(t)$ dans la base $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$



7. On considère un système différentiel linéaire $W' = BW$, où B est une matrice admettant deux vecteurs propres indépendants W_1 et W_2 de valeurs propres respectives λ_1 et λ_2. On pose $w_1(t) = ae^{\lambda_1 t}$ et $w_2(t) = be^{\lambda_2 t}$. Montrer que $W(t) = w_1(t)W_1 + w_2(t)W_2$ est solution de ce système.

$$BW(t) = B\left(w_1(t)W_1 + w_2(t)W_2\right) = B\,w_1(t)W_1 + B\,w_2(t)W_2 = w_1(t)\,BW_1 + w_2(t)\,BW_2$$
$$= w_1(t)\lambda_1 W_1 + w_2(t)\lambda_2 W_2 = \lambda_1 a e^{\lambda_1 t} W_1 + \lambda_2 b e^{\lambda_2 t} W_2,$$
$$= \left(ae^{\lambda_1 t}\right)' W_1 + \left(be^{\lambda_2 t}\right)' W_2 = \left(ae^{\lambda_1 t}W_1\right)' + \left(be^{\lambda_2 t}W_2\right)' = \left(ae^{\lambda_1 t}W_1 + be^{\lambda_2 t}W_2\right)'$$
$$= W'(t) \quad \text{CQFD}$$

8. Montrer que $w_2(t) = Cw_1(t)^n$, en précisant les valeurs de C et n en fonction de λ_1, λ_2, a et b.

$$w_2(t) = b e^{\lambda_2 t} = b\left(e^{\lambda_1 t}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = \frac{b}{a^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}}\left(ae^{\lambda_1 t}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = C\,w_1(t)^n$$

pour $C = \dfrac{b}{a^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}}$ et $n = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$

9. On suppose que $\lambda_1 = \alpha + i\omega$ et $\lambda_2 = \alpha - i\omega$, et que $W_1 = \begin{pmatrix} 2+3i \\ 1+i \end{pmatrix}$ et que $W_2 = \begin{pmatrix} 2-3i \\ 1-i \end{pmatrix}$.

On suppose que a et b sont des nombres réels ; Calculer $\mathrm{Re}\,(W(t))$ et $\mathrm{Im}\,(W(t))$.[1]

$$W(t) = a\,e^{(\alpha+i\omega)t}\begin{pmatrix} 2+3i \\ 1+i \end{pmatrix} + b\,e^{(\alpha-i\omega)t}\begin{pmatrix} 2-3i \\ 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{\alpha t}(\cos(\omega t)+i\sin(\omega t))(2+3i) + be^{\alpha t}(\cos\omega t - i\sin\omega t)(2-3i) \\ ae^{\alpha t}(\cos\omega t + i\sin\omega t)(1+i) + be^{\alpha t}(\cos\omega t - i\sin\omega t)(1-i) \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{e^{\alpha t}\begin{pmatrix} (2a+2b)\cos\omega t - 3(a+b)\sin\omega t \\ (a+b)\cos\omega t + (b-a)\sin\omega t \end{pmatrix}}_{=\mathrm{Re}\,W(t)} + i\,\underbrace{e^{\alpha t}\begin{pmatrix} 3(a-b)\cos\omega t + 2(a-b)\sin\omega t \\ (a-b)\cos\omega t - (a+b)\sin\omega t \end{pmatrix}}_{=\mathrm{Im}\,W(t)}.$$

10. Si $\alpha < 0$ que pouvez-vous dire du comportement les solutions du système $W' = BW$?

Nous voyons que la partie réelle et la partie immaginaire de la solution comporte la fonction $e^{\alpha t}$ en facteur d'une fonction périodique donc bornée. Si $\alpha < 0$ on a $\lim_{t\to+\infty} e^{\alpha t} = 0$ Les solutions tendent donc vers 0 en oscillant.

1. Rappel : $e^{\alpha t + i\omega t} = e^{\alpha t}e^{i\omega t} = e^{\alpha t}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))$

2 Exercices au moyen de Scilab

Nous avons vu dans les exercices précédant quel est le rôle des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice associée à un système différentiel. La commande `spec` permet de trouver les valeurs propres (sous forme des éléments diagonaux d'une matrice) et des vecteurs propres (sous forme des vecteurs colonnes d'une matrice.

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Saisir la matrice A dans Scilab au moyen de la commande `A=[-3,1;1,-3];` Determiner et donner ses valeurs propres et deux vecteurs propres associés, au moyen de la commande `[vcp,vlp]=spec(A)`

   Notez que $\|V_i\|_2 = 1.$, $i=1,2$

   On obtient
   $$vlp = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad vcp = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0.7071068 \\ -0.7071068 \end{matrix}}_{V_1} & \underbrace{\begin{matrix} 0.7071068 \\ 0.7071068 \end{matrix}}_{V_2} \end{pmatrix}$$
   Deux valeurs propres $\lambda_1 = -4$ et $\lambda_2 = -2$

   deux vecteurs propres : V_1 V_2

2. On considère le système différentiel associé
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & f(x,y) \\ y' & = & g(x,y) \end{array} \right. \tag{3}$$
   Définir la fonction Scilab `f(x,y)` par la commande
   `function f=f(x,y); f=A(1,1)*x+A(1,2)*y endfunction;`
   Définir et donner ici, de même, la fonction Scilab `g(x,y)`, puis définir la fonction Scilab `w(t,u)` adaptée à son utilisation dans `fchamp` et `edo` (voir TP5).

   function g = g(x,y); g = A(2,1)*x + A(2,2)*y; endfunction
   function w=w(t,v); w=[f(v(1),v(2)); g(v(1),v(2))]; endfunction;

3. Les commandes suivantes permettent de représenter des trajectoires du système différentiel (3) issues de $[-3,+3]^2$.

```
xmin=-3;ymin=-3;xmax=3;ymax=3;
xx=xmin:0.5:xmax;yy=ymin:0.3:ymax;
xset("window",1);fchamp(w,0,xx,yy)
tt=0:0.01:5;
for numerotraj=1:100
 M0=[-3+6*rand();-3+6*rand()];
 M=ode(M0,0,tt,w);
 xt=M(1,:);yt=M(2,:);
 plot(xt,yt);
end;
```

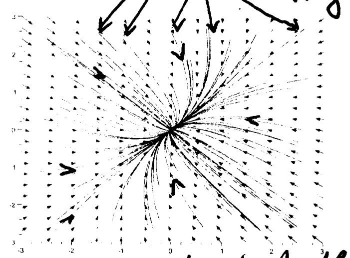
   tracé de 100 trajectoires.

   choix de la condition initiale selon une loi uniforme dans $[-3,3]\times[-3,+3]$

   boucle

   ← tracé de la trajectoire

   conditions initiales au hasard.



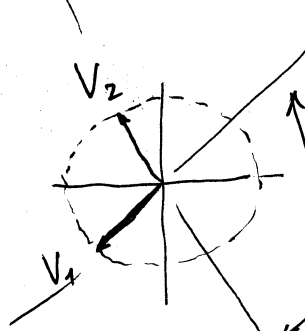
   Noeud stable

   Combien de trajectoires ont été tracées? Comment ont-elles été choisies? Esquisser ci-dessus à droite le tracé que vous observez. Marquer l'équilibre $(0,0)$ ainsi que les directions propres trouvées ci-dessus. Indiquer le sens de parcours des trajectoires. Esquisser la trajectoire issue de $(3,3)$. Comment s'appelle ce comportement dans la classification de Poincaré?

   Ce sont 100 trajectoires qui sont tracées, avec une condition initiale $M0 \in [-3,+3]\times[-3,+3]$ choisie au hasard, uniformément.
   Il s'agit d'un noeud stable ($\lambda_1 < \lambda_2 < 0.$)

4. On considère à présent le système différentiel associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ Quelles sont ses valeurs propres? Comment s'appelle, dans la classification de Poincaré, le comportement du système? Indiquer les directions propres.

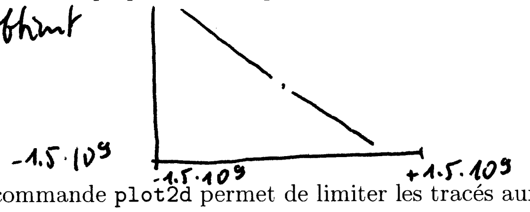
   spec(A) nous donne $\lambda_1 = +2$ et $\lambda_2 = +4$; donc $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ nous avons donc un noeud instable.
   Directions propres données par $V_1 = 0{,}7071068 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = 0.7071068 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$



directions propres

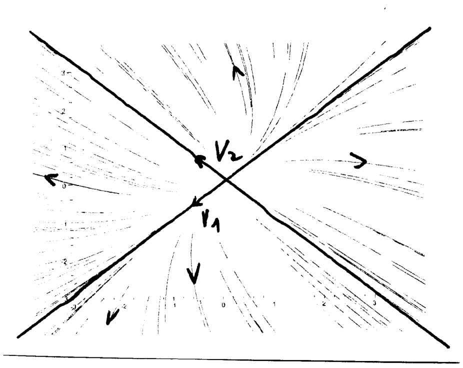
5. Réexecutez le programme de tracé des solutions avec cette nouvelle matrice A. Qu'observez-vous ? Comment expliquez-vous ce phénomène ?

On obtient



Les 100 trajectoires tracées semblent confondues avec la direction propre associée à la plus grande valeur propre $\lambda_2=4$, car $e^{4.5}=e^{\lambda_2 T_{max}}$ est très grand

6. La commande `plot2d` permet de limiter les tracés aux points situés dans un rectangle. Si l'on pose `bornes=[xmin,ymin,xmax,ymax];`, il suffit de remplacer `plot(xt,yt);` par `plot2d(xt,yt,rect=bornes);`. Faites cette modification et esquissez ci-dessous ce que vous observez, en ajoutant les directions propres et le sens de parcours des trajectoires.



Les valeurs propres sont positives : les solutions tendent donc vers l'infini lorsque $t\to+\infty$.

Noeud instable

7. On considère à présent le système différentiel associé à la matrice $A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -1 & 0.5\end{pmatrix}$ Refaire la même étude (spectre, classification de Poincaré, tracé des trajectoires orientées et des directoires propres) pour ce système.

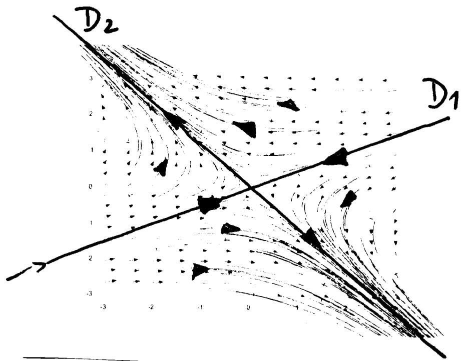
$\lambda_1<0$: direction stable

$V_1=\begin{pmatrix}-0.9202..\\ -0.3914..\end{pmatrix}$

$\lambda_2>0$: direction instable

$V_2=\begin{pmatrix}0.6479...\\ -0.761...\end{pmatrix}$

spect(A) donne $\lambda_1=-1.8507811$ et $\lambda_2=1.3507811$; on a donc $\lambda_1<0<\lambda_2$: c'est donc un col dans la classification de Poincaré



direction stable

Col.

direction instable

8. On considère enfin le système différentiel associé à la matrice $A=\begin{pmatrix}-0.5 & 1\\ -2 & -0.5\end{pmatrix}$. Comment s'appelle, dans la classification de Poincaré, le comportement de ce système ? Esquissez ci-dessous le comportement des trajectoires, en précisant leur sens de parcours.

spec(A) nous donne les vlp $\lambda=\alpha\pm i\omega$

avec $\alpha=-0.5$ et $\omega=1.414...$

Elles sont donc complexes : c'est un foyer, stable car $\alpha=-0.5<0$.

Foyer stable