Université de Nice
Département de Mathématiques

L3MASS et L3 Maths, année 2017-2018
Systèmes Dynamiques

NOM : Date : .
PRENOM : .

Feuille-réponse du TP7
Systèmes différentiels non linéaires

1 Exercices sur table

Exercice 1. : Nous allons étudier le système différentiel non-linéaire

$$\begin{cases} x' = x(18 - 3x - 4y) = f(x, y) \\ y' = y(18 - 6x - 2y) = g(x, y) \end{cases} \tag{1}$$

1. Déterminer sur quelles régions les abscisses $x(t)$ sont croissantes et décroissantes, et de même pour les ordonnées $y(t)$. Représenter ces régions ci-dessous, pour $(x, y) \in [-2, 10] \times [-2, 15]$; cette figure sera précisée par la suite : soignez-la !

2. Déterminer les quatre points d'équilibre de ce système. On appelle C celui dont aucune des coordonnées n'est nulle. Représenter ces quatre points sur votre figure. Observez que, sur les axes, le champ de vecteurs associé à (1) est parallèle à l'axe qui le porte : préciser le sens de parcours.

3. Calculer la matrice jacobienne $J(x, y)$ de ce système au point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

4. Calculer la somme et le produit des valeur propres de $J(C)$. En déduire le signe ce ces valeurs propres et la nature du point stationnaire C dans la classification de Poincaré.

5. Vérifier que les vecteurs ${}^t(2,3)$ et ${}^t(2,-3)$ sont des vecteurs propres de $J(C)$. Quelles sont les valeurs propres associées ?

6. Représentez ces vecteurs propres, attachés au point C.

7. Soit $B = (x_0, 0)$ le point d'équilibre non nul situé sur l'axe des x. Vérifier que ${}^t(1,0)$ est une vecteur propre de $J(B)$; pourquoi était-ce prévisible ? Quelle est la valeur propre associée. Y a-t-il une seconde valeur propre ? Y a-t-il une base de $\mathbb{R}^2$ vecteurs propres de $J(B)$?

8. Esquissez/devinez un comportement des trajectoires du système (1) : effectuez votre tracé au crayon : vous pourrez le corriger au vu des tracés d'ordinateur ;-)

2 Exercices au moyen de `Scilab`

Nous reprenons l'étude du système différentiel (1) à l'aide de `Scilab` cette fois. Inspirez-vous de ce qui a été fait lors du TP6 pour vos programmes.

1. Définir des `function Scilab f(x,y), g(x,y), et w(t,u)` pour pouvoir trouver des solutions numériques à ce système au moyen de la commande `ode(M0,0,tt,w);`.

2. On pose `xmin=0;ymin=0;xmax=10;ymax=15` et `tt=0:0.005:1;`. Définir `xx` et `yy` de manière à faire tracer dans la fenêtre 1 des directions du champ de vecteurs associé au système.

3. Au moyen d'une boucle `for` faire tracer `100` portions trajectoires issues de points choisit au hasard dans le rectangle de `bornes=[xmin,ymin,xmax,ymax]`.

4. A la différence de `Maple`, `Scilab` ne sait pas calculer, formellement, des dérivées partielles. Mais les dérivées étant des limites, on trouve une bonne approximation de la matrice jacobienne au point (x, y) au moyen de la `function Scilab jac` ci-dessous. Expliquer pourquoi.

```
function J=jac(x,y);
 acc=0.0000001; // un "petit" accroissement
 J(1,1)=(f(x+acc,y)-f(x,y))/acc;
 J(2,1)=(g(x+acc,y)-g(x,y))/acc;
 J(1,2)=(f(x,y+acc)-f(x,y))/acc;
 J(2,2)=(g(x,y+acc)-g(x,y))/acc;
endfunction;
```

5. Utiliser `jac` pour retrouver valeurs propres et vecteurs propres de la matrice jacobienne du système au point C. Que trouvez-vous ?

6. Utiliser `jac` pour trouver valeurs propres et vecteurs propres de la matrice jacobienne du système au point $A = (0, y_0)$ qui est le point d'équilibre non-nul situé sur l'axe des y. Que trouvez-vous ? Comparez avec ce que vous aviez trouvé au point B. Commentez.

7. Utiliser `jac` pour trouver valeurs propres et vecteurs propres de la matrice jacobienne du système au point $O = (0, 0)$. Quelle est la nature de ce point dans la classification de Poincaré.

8. Utiliser ce que vous avez trouvé sur le spectre aux points d'équilibre pour préciser le comportement des trajectoires au voisinage des équilibres sur votre figure.

9. Pour avoir le comportement des trajectoires pour des x ou y négatifs, on pose à présent `xmin=-2,ymin=-2`. Refaites vos tracés avec ces nouvelles valeurs ; qu'observez-vous ? Expliquez.

10. Comment remplacer la commande `plot` pour éviter cet inconvénient. Effectuez cette modification et complétez votre dessin pour des x ou y négatifs.