Université de Nice
Département de Mathématiques
NOM :
PRENOM :

L3MASS et L3 Maths, année 2013-2014

Date : .

Groupe : .

Feuille-réponse du TP ~~5~~ 7

~~Introduction aux~~ systèmes différentiel non-linéaires

1 Exercices sur table

Exercice 1. : Nous allons étudier le système différentiel non-linéaire

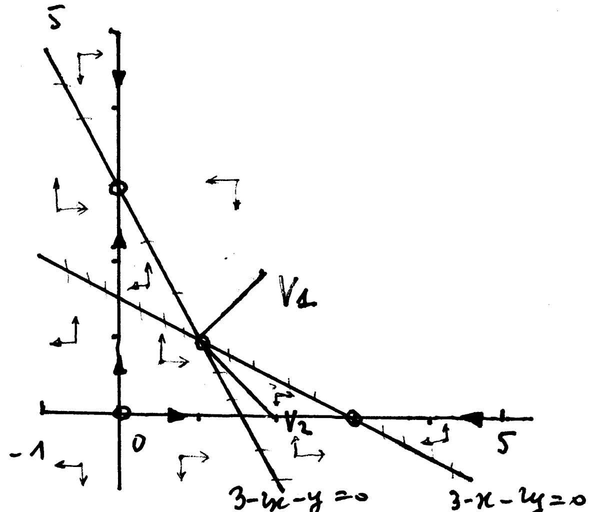
$$\begin{cases} x' &= x(3-x-2y) = f(x,y) = 3x - x^2 - 2xy \\ y' &= y(3-2x-y) = g(x,y) = 3y - 2xy - y^2 \end{cases} \qquad (1)$$

1. Déterminer sur quelles régions les abscisses $x(t)$ sont croissantes et décroissantes, et de même pour les ordonnées $y(t)$. Représenter ces régions ci-dessous, pour $(x,y) \in [-1,5]^2$; cette figure sera précisée par la suite : soignez-la !

$x(t)$ croissant $\Leftrightarrow x' \geq 0 \Leftrightarrow x(3-x-2y) \geq 0 \Leftrightarrow$ $x \geq 0$ et $3-x-2y \geq 0$ ou $x \leq 0$ et $3-x-2y \leq 0$

à noter que $3-x-2y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq \frac{3-x}{2}$

De même $y(t)$ croissant $\Leftrightarrow$ $y \geq 0$ et $y \leq 3-2x$ ou $y \leq 0$ et $y \geq 3-2x$



Sur l'axe des x, on a $y=0$ et donc $y'=0$; le champ est donc horizontal sur l'axe des x qui contient donc ses trajectoires
De même pour l'axe des y.

2. Déterminer les quatre points d'équilibre de ce système. On appelle C celui dont aucune des coordonnées n'est nulle. Représenter ces quatre points sur votre figure. Observez que, sur les axes, le champ de vecteurs associé à (1) est parallèle à l'axe qui le porte : préciser le sens de parcours.

(x,y) équilibre $\Leftrightarrow f(x,y) = 0 = g(x,y)$
$\Leftrightarrow (x=0$ ou $3-x-2y=0)$ et $(y=0$ ou $3-2x-y=0)$
$\Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$ ou $(x,y)=(0,3)$ ou $(x,y)=(3,0) = B$ ou $(x,y)=(1,1)=C$

3. Calculer la matrice jacobienne $J(x,y)$ de ce système au point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2x-2y & -2x \\ -2y & 3-2x-2y \end{pmatrix}$$

4. Calculer la somme et le produit des valeur propres de $J(C)$. En déduire le signe ce ces valeurs propres et la nature du point stationnaire C dans la classification de Poincaré.

$S = \lambda_1 + \lambda_2 = Tr(J) = 2(3 - 2(x+y))$

$P = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(J) = (3 - 2(x+y))^2 - 4xy$

$J(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Pour $(x,y) = C = (1,1)$ on a donc

$S = 2(3-2) = 2 > 0$

$P = (3 - 2\cdot 2)^2 - 4 = -3 < 0$ ← donc vlp de signe opposé donc C est un col

5. Vérifier que les vecteurs $(1,1)$ et $(1,-1)$ sont des vecteurs propres de $J(C)$. Quelles sont les valeurs propres associées ?

$J(C)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vep associé à la vlp -3

$J(C)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vep associé à la vlp $+1$

6. Représentez ces vecteurs propres, attachés au point C.

voir figure question 1. On note $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

7. Soit $B = (x_0, 0)$ le point d'équilibre non nul situé sur l'axe des x. Vérifier que ${}^t(1,0)$ est une vecteur propre de $J(B)$; pourquoi était-ce prévisible ? Quelle est la valeur propre associée. Y a-t-il une seconde valeur propre ? Y a-t-il une base de $\mathbb{R}^2$ vecteurs propres de $J(B)$?

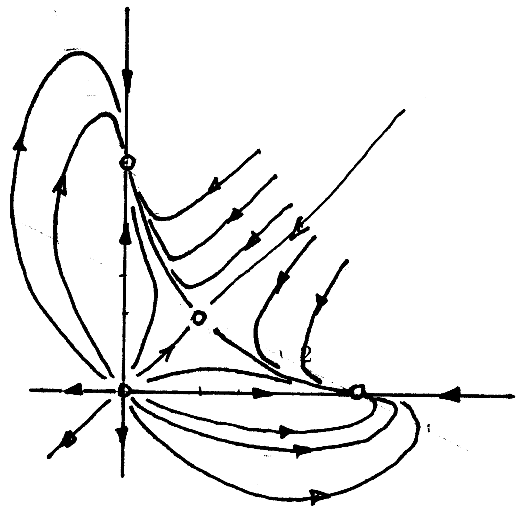
$B = (3, 0)$

$J(B) = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

$J(B)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ c'est donc un vep associé à la vlp -3

On a vu que l'axe des x contient ses trajectoires il est donc normal que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ soit une direction propre du linéarisé de (1) au point B.

8. Esquissez/devinez un comportement des trajectoires du système (1) : effectuez votre tracé au crayon : vous pourrez le corriger au vu des tracés d'ordinateur ;-)



2 Exercices au moyen de Scilab

Nous reprenons l'étude du système différentiel (1) à l'aide de Scilab cette fois. Inspirez-vous de ce qui a été fait lors du TP6 pour vos programmes.

1. Définir des function Scilab `f(x,y)`, `g(x,y)`, et `w(t,u)` pour pouvoir trouver des solutions numériques à ce système au moyen de la commande `ode(M0,0,tt,w);`.

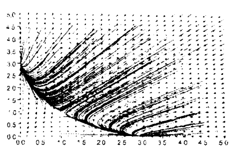
```
function f=f(x,y); f=x*(3-2*y-x); endfunction;
function g=g(x,y); g=y*(3-y-2*x); endfunction;
function w=w(t,v); w=[f(v(1),v(2)); g(v(1),v(2))]; endfunction
```

2. On pose `xmin=0;ymin=0;xmax=5;ymax=5` et `tt=0:0.01:2;`. Définir `xx` et `yy` de manière à faire tracer dans la fenêtre 1 des directions du champ de vecteurs associé au système.

```
xx = xmin:0.2:xmax;
yy = ymin:0.2:ymax;
xset("window",1);
fchamp(w,0,xx,yy);
```

3. Au moyen d'une boucle `for` faire tracer 100 portions trajectoires issues de points choisit au hasard dans le rectangle de `bornes=[xmin,ymin,xmax,ymax]`.

```
for numerotraj = 1:100
  M0 = [xmin+(xmax-xmin)*rand(); ymin+(ymax-ymin)*rand()];
  M = ode(M0,0,tt,w); xt=M(1,:); yt=M(2,:);
  plot2d(xt,yt,rect=bornes)
end;
```



4. A la différence de Maple, Scilab ne sait pas calculer, formellement, des dérivées partielles. Mais les dérivées étant des limites, on trouve une bonne approximation de la matrice jacobienne au point (x, y) au moyen de la function Scilab `jac` ci-dessous. Expliquer pourquoi.

```
function J=jac(x,y);
 acc=0.0000001; // un "petit" accroissement
 J(1,1)=(f(x+acc,y)-f(x,y))/acc;
 J(2,1)=(g(x+acc,y)-g(x,y))/acc;
 J(1,2)=(f(x,y+acc)-f(x,y))/acc;
 J(2,2)=(g(x,y+acc)-g(x,y))/acc;
endfunction;
```

$J(1,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f(x+h,y) - f(x,y)\right)$

$\simeq \left(f(x+h,y) - f(x,y)\right)/h$ pour h petit.

ici on a choisi $h = acc = 10^{-7}$.

De même pour $J(1,2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, $J(2,1) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$

et $J(2,2) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$

5. Utiliser jac pour retrouver valeurs propres et vecteurs propres de la matrice jacobienne du système au point C. Que trouvez-vous ?

[vcp, vlp] = spec(jac(1,1));

$$vlp = \begin{pmatrix} -3.0000001 & 0 \\ 0 & 0.9999999 \end{pmatrix} \qquad vcc = \begin{pmatrix} 0.7071068 & -0.7071068 \\ 0.7071068 & 0.7071068 \end{pmatrix}$$

λ_1 λ_2 V_1 V_2.

6. Utiliser jac pour trouver valeurs propres et vecteurs propres de la matrice jacobienne du système au point $A = (0, y_0)$ qui est le point d'équilibre non-nul situé sur l'axe des y. Que trouvez-vous ? Comparez avec ce que vous aviez trouvé au point B. Commentez.

$A = (0, y_0) = (0, 3)$

[vcp, vlp] = spec(jac(0,3))

On trouve -3 comme vlp double mais pas deux vcp indépendants
Le point A un noeud stable

7. Utiliser jac pour trouver valeurs propres et vecteurs propres de la matrice jacobienne du système au point $O = (0, 0)$. Quelle est la nature de ce point dans la classification de Poincaré.

[vcp, vlp] = spec(jac(0,0))

On trouve 3 comme vlp double et deux vcp indépendants $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Donc (0,0) est un noeud dégénéré instable.

8. Utiliser ce que vous avez trouvé sur le spectre aux points d'équilibre pour préciser le comportement des trajectoires au voisinage des équilibres sur votre figure.

C est un col de directions propres V_1 et V_2
A et B sont des noeuds stables de direction propres $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ respectivement
O est un noeud dégénéré instable

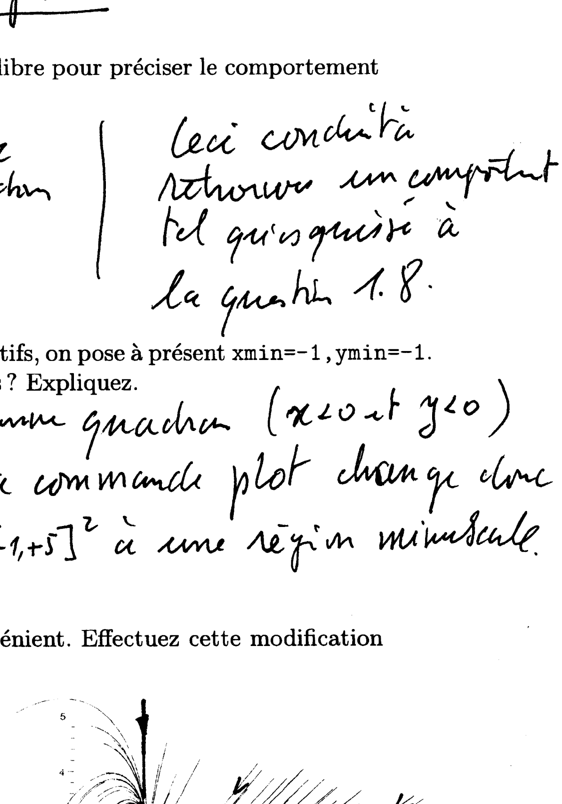
Ceci conduit à retrouver un comportement tel qu'esquissé à la question 1.8.

9. Pour avoir le comportement des trajectoires pour des x ou y négatifs, on pose à présent xmin=-1,ymin=-1. Refaites vos tracés avec ces nouvelles valeurs ; qu'observez-vous ? Expliquez.

Certaines trajectoires issues du troisième quadrant ($x<0$ et $y<0$) deviennent très grandes, négatives ; la commande plot change donc l'échelle réduisant la zone initiale $[-1,+5]^2$ à une région minuscule.

10. Comment remplacer la commande plot pour éviter cet inconvénient. Effectuez cette modification et complétez votre dessin pour des x ou y négatifs.

Pour éviter cela on utilise
plot2d(xt, yt, rect=bornes);



On a ajouté, à la main, les trajectoires parties par les axes
On retrouve les comportements devinés à la question 1.8.