

Francesca Rapetti  
Université de Nice Sophia-Antipolis  
Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné  
Parc Valrose  
06108 Nice Cedex 02  
France

Mémoire de synthèse pour  
l'habilitation à diriger des recherches

DISCRÉTISATION VARIATIONNELLE D'ORDRE ÉLEVÉ SUR SIMPLEXES:  
APPLICATIONS À L'ÉLECTROMAGNÉTISME NUMÉRIQUE

Soutenue le 20 juin 2008 devant le jury composé de :

Christine Bernardi	(Laboratoire J.-L.L., C.N.R.S., Paris)
Jacques Blum	(Laboratoire J.-A.D., Univ. Nice Sophia-Antipolis, Nice)
Alain Bossavit	(Laboratoire L.G.E.P., Supélec, Paris)
Patrick Ciarlet	(Laboratoire P.O.E.M.S., E.N.S.T.A., Paris, rapporteur)
Claudio Canuto	(École Polytechnique de Turin, rapporteur)
Yvon Maday	(Laboratoire J.-L.L., Univ. Pierre et Marie Curie, Paris)
Richard Pasquetti	(Laboratoire J.-A.D., C.N.R.S., Nice)
Anthony Patera	(M.I.T., Boston, rapporteur)



## Remerciements

J'exprime ma plus grande gratitude à Claudio Canuto, Patrick Ciarlet Jr. et Anthony Patera qui m'ont fait l'honneur de rapporter sur ce manuscrit. Je les remercie très sincèrement pour le temps précieux qu'ils m'ont consacré et pour l'intérêt qu'ils ont montré pour mes recherches.

Mes remerciements vont également à Jacques Blum d'avoir accepté de présenter mon habilitation à diriger des recherches au Conseil Scientifique de l'Université de Nice Sophia-Antipolis, Christine Bernardi, Alain Bossavit, Yvon Maday et Richard Pasquetti d'avoir accepté de faire partie du jury.

Merci à tous d'être présents aujourd'hui.

Depuis sept ans, j'ai le plaisir d'être enseignant-chercheur au sein du Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné de l'Université de Nice-Sophia Antipolis, dirigé avec beaucoup de passion par Philippe Maisonobe. J'ai grandement apprécié les conditions de travail, la facilité des échanges scientifiques, l'ambiance cordiale de ce laboratoire.

Il m'est également très agréable d'évoquer l'accueil amical que l'on m'a fait à l'INRIA de Sophia-Antipolis et la confiance qui m'a été témoignée, en m'invitant à faire partie du projet NACHOS dirigé par Stéphane Lanteri.

Une pensée particulière s'adresse à tous mes collaborateurs, en particulier ceux faisant partie du jury. Ces collaborations sont encore aujourd'hui l'occasion d'échanges fructueux et intéressants. Je remercie ainsi mes co-auteurs dont Yvon Maday, qui reste avant tous mon directeur de thèse et dont l'énergie et l'enthousiasme ont été toujours très communicatifs (même par téléphone !), Christine Bernardi, dont la curiosité permanente pour de nouvelles méthodes et le sérieux ont apporté beaucoup d'efficacité à nos travaux communs, Alain Bossavit, qui a toujours su me transmettre sa passion pour la science et qui reste une source inépuisable de questions (et de réponses !) en électromagnétisme, Richard Pasquetti qui m'a aidé à déchiffrer les subtilités des méthodes d'éléments spectraux, ... et beaucoup d'autres dont j'omets le nom ici mais sans qui ces travaux n'auraient pas pu voir le jour.

Je n'aurais pas pu mener à bien mes travaux sans le réconfort permanent et la compréhension de mon mari Eros et le soutien de ma famille.

Je dédie ces travaux à mes trois enfants, Marco, Fabio et Giulia. Merci d'exister.



## Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Méthodes d'éléments spectraux pour des problèmes aux limites elliptiques</b>	<b>9</b>
2.1	La méthode $QSEM$ , Gauss-Lobatto-Legendre sur quadrilatères . . . . .	10
2.2	La méthode $TSEM$ , Fekete-Gauss sur triangles . . . . .	13
2.2.1	Les points de Fekete . . . . .	13
2.2.2	Formules de quadrature . . . . .	15
2.2.3	Matrices de dérivation . . . . .	17
2.2.4	Résultats numériques pour la méthode $TSEM$ : précision et application à l'électromagnétisme . . . . .	18
2.3	Résolution du système linéaire pour $QSEM$ et $TSEM$ . . . . .	19
2.3.1	Préconditionneur de type Schwarz pour $QSEM$ et $TSEM$ . . . . .	21
2.3.2	Préconditionneur à sous-structures pour $TSEM$ . . . . .	23
2.3.3	Méthode $p$ -multigrille pour $TSEM$ . . . . .	26
2.4	Conclusions et perspectives . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Quelque applications en l'électromagnétisme des éléments de Whitney</b>	<b>31</b>
3.1	Notations . . . . .	33
3.2	$p$ -formes de Whitney d'ordre un sur les simplexes . . . . .	38
3.3	Calcul automatique de groupes d'homologie . . . . .	43
3.4	Opérateurs de restriction/prolongement pour les éléments de Whitney . . . . .	45
3.5	$p$ -formes de Whitney de degré supérieur à un . . . . .	47
3.6	Conclusions et perspectives . . . . .	50
<b>4</b>	<b>La méthode d'éléments finis avec joints</b>	<b>51</b>
4.1	Le cas d'une décomposition de $\Omega$ <i>sans</i> recouvrement entre les sous-domaines . . . . .	52
4.1.1	Discrétisation de la condition de couplage . . . . .	55
4.1.2	Multiplicateurs de Lagrange d'ordre élevé dans la condition de couplage . . . . .	57
4.2	Le cas d'une décomposition de $\Omega$ <i>avec</i> recouvrement entre sous-domaines . . . . .	58
4.3	Formulation $T-\Phi$ pour le problème de la magnétodynamique . . . . .	60
4.4	Conclusions et perspectives . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Publications</b>	<b>65</b>
<b>6</b>	<b>Références</b>	<b>70</b>



## 1 Introduction

L'électromagnétisme numérique a suscité ces dernières années un intérêt croissant de la part des numériciens et a fourni un champ d'application de techniques avancées de mathématiques appliquées et de calcul scientifique. Les enjeux technologiques, qui pendant les dernières années sont devenus de plus en plus importants (soins médicaux par radiation, téléphonie mobile, etc.) ont mis en évidence la nécessité d'avoir des algorithmes fiables et performants. Les méthodes de discrétisation d'ordre élevé pour l'approximation d'équations aux dérivées partielles (EDPs) sont désormais incontournables pour leurs propriétés de convergence rapide (qui peut être exponentielle en présence de solutions très régulières) et de haute précision.

Ayant abordé ce domaine de recherche lors de mon travail au sein du CRS4 et ensuite lors de ma thèse, mes recherches autour de méthodes de discrétisation variationnelle d'ordre élevé pour des problèmes aux limites en électromagnétisme ont continué par la suite et seront l'objet central de ce mémoire. Ma recherche a porté sur l'étude de trois techniques numériques avancées : les méthodes d'éléments spectraux sur triangles/tétraèdres et des préconditionneurs issus de la décomposition de domaine pour les systèmes linéaires résultants, la définition et l'application des éléments finis de Whitney de degré polynomial un ou plus, les méthodes (de type "mortar") de décomposition de domaine non-conforme avec ou sans recouvrement entre les sous-domaines.

Le premier chapitre est dédié à des problèmes aux limites elliptiques discrétisés par une méthode Fekete-Gauss d'éléments spectraux sur triangles (*TSEM*). La méthode *TSEM* est définie et analysée sous différents aspects, comme la précision, la flexibilité, le conditionnement des matrices finales à inverser. La précision de la méthode spectrale par rapport au degré  $p$  d'approximation polynomiale et algébrique par rapport à la taille  $h$  des éléments du maillage, est conservée grâce à un bon choix des points d'approximation (les points de Fekete sur le triangle) et de la formule de quadrature (formule de type Gauss) pour le calcul des intégrales présentes dans la formulation variationnelle du problème. La flexibilité de la méthode repose sur la possibilité de discrétiser le domaine de calcul avec des maillages à éléments triangulaires, à côtés droits ou courbes, de jouer sur le couple taille des éléments et degré d'approximation pour aboutir au choix le meilleur pour le problème considéré, et de s'appuyer sur des algorithmes multiniveaux à maillage fixe ( $p$ -multigrille) où chaque niveau est associé à un degré d'approximation différent. Le mauvais conditionnement des matrices finales à inverser est traité de manière satisfaisante à l'aide de préconditionneurs issus de la décomposition de domaine. La méthode a été appliquée à la résolution d'un problème modèle de diffraction d'une onde plane par un objet polygonal métallique.

Dans la deuxième partie, on s'intéresse aux éléments de Whitney sur simplexes. On regarde des applications pour ces éléments en topologie algébrique (calcul automatique des nombres de Betti pour un domaine à topologie non-triviale), on définit des opérateurs de restriction et prolongement entre maillages emboîtés pour la mise au point d'une technique multiniveau, on introduit une approche d'ordre élevé où les degrés de liberté

gardent une signification physique (comme la circulation du champ électrique le long des arêtes du maillage). Tous ces aspects sont validés du point de vue numérique pour la résolution d'un problème aux limites elliptique en magnétostatique ou magnétodynamique (après discrétisation en temps).

La troisième partie est dédiée à l'étude d'une méthode d'éléments finis avec joints en présence de sous-domaines avec recouvrement pour la simulation des courants induits dans des conducteurs mobiles dans un champ magnétique. Cette version avec recouvrement de la méthode des joints, différente de celle sans recouvrement étudiée pendant la thèse, est préférable en l'absence d'interfaces invariantes par le mouvement. La méthode a été utilisée pour coupler un potentiel scalaire dans l'aire, décrit par des éléments finis nodaux sur un maillage, et un potentiel vecteur dans le conducteur, décrit par des éléments finis d'arêtes sur un autre maillage indépendant du premier. À la suite d'une étude théorique et numérique, la méthode a été utilisée pour la discrétisation variationnelle d'un problème couplé magnéto-mécanique dans le but de simuler un frein électromagnétique. Pour la méthode d'éléments finis avec joints en absence de recouvrement entre les sous-domaines, on présente une étude détaillée de la discrétisation de la condition de couplage ainsi que la possibilité d'augmenter de façon hiérarchique le degré d'interpolation polynomiale sur l'interface.

Quelques mots sur ce manuscrit.

Ce manuscrit contient seulement du texte et aucune figure. Les figures d'explication de certaines notations ou relatives aux résultats numériques obtenus sont contenues dans les articles de l'auteur cités dans ce manuscrit.

Les notations adoptées dans ce manuscrit sont parfois différentes de celles adoptées dans les articles correspondants, pour un souci (espérons-le) d'uniformité dans la rédaction.

Noter l'omission volontaire de la variable  $x$  ou autre, de l'élément de volume  $dx$ , de surface  $d\Gamma$ , etc., sous le signe d'intégrale, chaque fois qu'on peut. Par exemple, l'intégrale  $\int_D f(x) dx$  devient simplement  $\int_D f$ , où la dimension du domaine d'intégration  $D$  et l'expression à intégrer indiqueront s'il s'agit d'une intégrale de volume, de surface ou de ligne.

## 2 Méthodes d'éléments spectraux pour des problèmes aux limites elliptiques

Parmi les très nombreuses techniques utilisées pour la discrétisation d'équations aux dérivées partielles elliptiques, on a les méthodes de type variationnel. En effet, la plupart des équations elliptiques dans un domaine borné (et donc des équations paraboliques après discrétisation en temps, voir un exemple au chapitre 3) admettent une formulation variationnelle équivalente, reposant le plus souvent sur des espaces de Sobolev, et un problème discret peut être construit par approximation de ces espaces de dimension infinie par des espaces de dimension finie.

La méthode d'éléments spectraux "SEM" est une méthode de discrétisation variationnelle d'ordre élevé d'équations aux dérivées partielles, basée sur des idées originelles de A. T. Patera [90] pour le cas Chebyshev et développée dans la suite pour le cas Legendre, qui nous intéresse ici, par Y. Maday et A. T. Patera [79] (voir [12, 42, 73] pour une introduction générale). L'approximation par la méthode SEM dépend de la partition géométrique du domaine et du degré d'approximation polynomiale  $p$ . En considérant fixée la partition du domaine et en augmentant le degré  $p$  dans les sous-domaines pour améliorer la précision de l'approximation, la méthode SEM ressemble beaucoup, en termes de structure, à la méthode d'éléments finis, "FEM", d'ordre  $p$ . Dans le même esprit, nous avons la méthode d'éléments finis  $hp$  [9, 112, 104, 105], qui consiste en une méthode FEM dans laquelle la partition du domaine est raffinée en même temps que le degré polynomial  $p$  croît. Ces trois méthodes (SEM,  $p$ -FEM et  $hp$ -FEM) sont toutes basées sur l'utilisation d'un élément de référence sur lequel on construit les fonctions de base. La principale différence réside dans le choix de l'élément de référence, des fonctions de base (qui va influencer la structure des matrices des systèmes linéaires correspondants) ainsi que dans la façon de calculer les intégrales. La méthode SEM utilise un quadrangle comme élément de référence. Elle est née comme généralisation des méthodes spectrales à des domaines ne pouvant pas être l'image d'un élément de référence unique. Elle permet donc de faire du raffinement local de maillage, de prendre en compte les comportements différents de la solution sur différentes parties du domaine, etc. (voir [73] pour une présentation générale sur le sujet). Dans notre travail de recherche<sup>1</sup> on a essayé d'aller encore plus loin, pour pouvoir appliquer la méthode d'éléments spectraux dans le cas d'un maillage simplicial.

Dans la première partie de ce chapitre, on s'intéresse donc à la définition d'une méthode SEM sur triangles (tétraèdres en trois dimensions). L'intérêt de cette nouvelle méthode est à la fois de garder la "convergence de type  $hp$ "<sup>2</sup> de la solution approchée à

---

<sup>1</sup>En collaboration avec *Richard Pasquetti* (DR CNRS) à l'Université de Nice Sophia-Antipolis, France. L'aide de M. Pasquetti a été fondamentale pour démarrer sur la partie SEM, étant moi plutôt du côté FEM, et pour discuter les résultats numériques obtenus.

<sup>2</sup>Si l'on considère un problème aux limites elliptique avec une solution  $u \in H^k(\Omega)$  et une source  $f \in H^p(\Omega)$ , l'estimation d'erreur classique en énergie dans le cas des méthodes précédentes appliquées sur un maillage uniforme de  $\bar{\Omega}$  par des éléments de taille  $h$  est du type  $\|u - u_\delta\|_E \leq C (h^{r-1} p^{-(k-1)}) \|u\|_k +$

la solution exacte, en combinant un raffinement des éléments du maillage (raffinement de type  $h$ ) et une augmentation du degré polynomial (raffinement de type  $p$ ) dans chaque élément, typique des méthodes SEM sur quadrilatères ou  $hp$ -FEM, et de pouvoir traiter facilement des problèmes aux limites posés dans des domaines de n'importe quel type de géométrie sans perdre en précision. De plus, à la différence de la méthode  $hp$ -FEM, elle reste une méthode de type nodal, les inconnues du problème discret étant associées à des nœuds particuliers dans les simplexes du maillage. Dans la deuxième partie, on analysera des techniques efficaces pour le préconditionnement et la résolution du système linéaire résultant de l'application de la méthode à un problème elliptique modèle. Dans tout ce chapitre, le degré d'approximation polynomiale est  $N \equiv p$ , sachant que  $N$  est plutôt utilisé dans les méthodes SEM et  $p$  dans celles FEM.

Le lecteur intéressé peut approfondir les concepts qui sont présentés dans ce chapitre de façon synthétique dans les références qui seront indiquées dans le texte. Bien sûr, ces quelques pages ne suffisent pas pour traiter le sujet de manière exhaustive et de même on ne pourra pas citer les nombreux articles et livres qui existent sur le sujet. On espère donner une présentation complète en ce qui concerne les idées principales.

## 2.1 La méthode $Q$ SEM, Gauss-Lobatto-Legendre sur quadrilatères

Cette partie est assez standard mais nécessaire à la compréhension des différences entre la méthode SEM classique sur quadrilatères ( $Q$ SEM) et celle sur triangles ( $T$ SEM) qui a fait l'objet de mes travaux de recherche.

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , à frontière  $\partial\Omega$  lipschitzienne et régulière par morceaux. On note  $\mathbf{n}$  la normale sortante à  $\partial\Omega$ . On considère, pour simplifier, un problème linéaire aux limites elliptique en deux dimensions avec conditions au bord de Dirichlet homogènes:

$$-\nabla \cdot (\alpha \nabla u) + \beta u = f \text{ dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (1)$$

avec  $\alpha, \beta > 0$  constantes par morceaux dans  $\Omega$  et  $f$  une fonction donnée dans  $L^2(\Omega)$ , l'espace de Hilbert des fonctions mesurables à carré sommable. La méthode et les résultats numériques présentés dans cette partie peuvent aussi être appliqués en trois dimensions à des problèmes aux limites elliptiques moins classiques (conditions aux bord de type Neumann, de type Robin, à coefficients variables, etc.). Le problème (1) est ré-écrit sous forme variationnelle comme suit:

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = (f, v) \text{ pour tout } v \in V, \quad (2)$$

où la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  et la forme linéaire  $(f, \cdot)$  sont définies par

$$a(u, v) := \int_{\Omega} (\alpha \nabla u \cdot \nabla v + \beta u v), \quad (f, v) := \int_{\Omega} f v \quad (3)$$

---

$h^s p^{-\rho} \|f\|_{\rho}$  où  $u_{\delta}$  est la solution approchée,  $r = \min(k, p+1)$ ,  $s = \min(k, \rho)$  et la constante  $C$  ne dépend pas de  $h, p, u, f$  mais dépend de  $k$  [62, 73]. On voit donc que l'erreur décroît algébriquement par rapport à  $h$ , et, si la solution est très régulière, de façon exponentielle par rapport à  $p$ .

et  $V$  est l'espace de Sobolev  $V \equiv H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ . Le problème variationnel (2) admet une solution unique  $u \in V$  grâce au lemme de Lax-Milgram. En supposant que les zones de discontinuité des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  sont régulières par morceaux, il est possible de prouver que la solution  $u$  du problème a priori dans  $H^1(\Omega)$  est en fait dans  $H^s(\Omega)$  pour  $s > 1$ .

Pour construire un problème discret qui peut être résolu sur l'ordinateur, on applique la méthode de Galerkin conforme, c'est-à-dire, on considère un sous-espace  $V_\delta \subset V$  de dimension finie,  $\delta$  étant le paramètre de discrétisation que l'on précisera dans la suite, et on pose le problème variationnel (2) dans  $V_\delta$ . Plus précisément, considérons un pavage  $\tau_h$  de  $\Omega$  par des quadrilatères  $Q$ , de diamètre maximal  $h$ , images du carré de référence

$$\hat{Q} = \{(r, s) : -1 \leq r, s \leq 1\} = [-1, 1]^2 \quad (4)$$

par des applications  $g_Q$ , *i.e.*,  $Q = g_Q(\hat{Q})$  et  $\bar{\Omega} = \cup_{Q \in \tau_h} \bar{Q}$ . Il faut que ce soit un "maillage", au sens des éléments finis (voir [FR20], chapitre VIII) c'est-à-dire que deux quadrilatères distincts se coupent selon une facette, une arête, un sommet, ou pas du tout (on parle ainsi de maillage géométriquement conforme). Soit  $\mathbb{Q}_N(\hat{Q})$  l'ensemble des polynômes définis sur  $\hat{Q}$  de degré inférieur ou égal à  $N$  par rapport à chaque variable. Alors, l'espace discret est défini comme suit:

$$V_\delta = V_{Q,N} = \{v \in V : v|_Q \circ g_Q \in \mathbb{Q}_N(\hat{Q}), \forall Q \in \tau_h\}. \quad (5)$$

Pour arriver au problème discret, il faut définir une base de l'espace  $V_{Q,N}$  et savoir calculer les intégrales présentes dans (2), c'est-à-dire, remplacer le produit  $L^2(\Omega)$  par une approximation, ici basée sur les points de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL). Ces points permettent, à la fois, de calculer les intégrales de façon précise et de construire une base pour  $V_{Q,N}$  par produit tensoriel de fonctions définies sur l'intervalle  $[-1, 1]$ . On note par  $\{\xi_j\}_{j=0}^N$  l'ensemble des points GLL sur l'intervalle  $[-1, 1]$  définis comme les  $(N+1)$  zéros du polynôme  $(1 - \xi^2) \frac{dL_N(\xi)}{d\xi}$  où  $L_N$  est le polynôme de Legendre de degré  $N$  sur  $[-1, 1]$ . On note  $\omega_j$  les poids de la formule de quadrature basée sur les nœuds  $\xi_j$ . On considère ensuite le polynôme d'interpolation de Lagrange  $\ell_j(r)$  de degré inférieur ou égal à  $N$  qui s'annule en tout point de GLL sauf  $\xi_j$  où il prend la valeur 1. Les fonctions de la base nodale de Lagrange sur le carré de référence  $\hat{Q}$  sont construites comme produits tensoriels  $\ell_j(r)\ell_k(s)$ ,  $0 \leq j, k \leq N$ . Toute fonction  $u \in \mathbb{Q}_N(\hat{Q})$  est représentable sur la base nodale de Lagrange en utilisant les valeurs  $u(\xi_j, \xi_k)$ ,  $0 \leq j, k \leq N$ , de  $u$  aux points GLL par

$$u(r, s) = \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N u(\xi_j, \xi_k) \ell_j(r) \ell_k(s). \quad (6)$$

Alors, sur  $\hat{Q}$ , le produit discret  $L^2$  est donné par

$$(u, v)_{\hat{Q},N} = \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N u(\xi_j, \xi_k) v(\xi_j, \xi_k) \omega_j \omega_k, \quad (7)$$

et sur  $\Omega$  par

$$(u, v)_{\Omega, N}^Q = \sum_{Q \in \tau_h} \sum_{j, k=0}^N (u \circ g_Q)(\xi_j, \xi_k)(v \circ g_Q)(\xi_j, \xi_k) |J_Q(\xi_j, \xi_k)| \omega_j \omega_k, \quad (8)$$

où  $J_Q$  est la matrice Jacobienne de l'application  $g_Q$ . Le problème variationnel discret s'écrit donc:

$$\text{Trouver } u \in V_{Q, N} \text{ tel que } a_{Q, N}(u, v) = (f, v)_{Q, N} \text{ pour tout } v \in V_{Q, N}, \quad (9)$$

où la forme bilinéaire  $a_{Q, N}(\cdot, \cdot)$  est obtenue à partir de  $a(\cdot, \cdot)$  définie dans (3) en remplaçant l'intégrale sur  $\Omega$  par la formule de quadrature (8). En utilisant l'expansion (6) dans (9) et en remplaçant  $v$  par les fonctions de la base de  $V_{Q, N}$ , le problème discret est équivalent à un système linéaire de la forme  $A_Q \mathbf{u} = \mathbf{b}$  où  $A_Q$  est la matrice QSEM assemblée,  $\mathbf{b}$  est le vecteur tenant compte de la source  $f$ , et  $\mathbf{u}$  est le vecteur des inconnues qui sont les valeurs de la fonction  $u$  aux nœuds GLL internes à  $\Omega$  (on rappelle que l'on considère ici des conditions aux limites de Dirichlet homogènes). La matrice  $A_Q$  est la somme de deux matrices, une matrice de raideur  $K_Q$  qui tient compte de la partie div grad du problème discret, et une matrice de masse  $M_Q$  qui tient compte de l'autre terme. Cette deuxième matrice est diagonale par le fait que les nœuds de quadrature et d'interpolation coïncident. Dans la suite on verra comment résoudre de manière efficace le système linéaire  $A_Q \mathbf{u} = \mathbf{b}$ .

Avant de passer au cas des éléments triangulaires, on tient à souligner les aspects importants de la méthode QSEM introduite ici pour  $d = 2$ . On définit, *localement et par produit tensoriel*,

- l'élément de référence  $\hat{Q} = [-1, 1]^2$ ,
- l'ensemble des  $n = (N + 1)^2$  nœuds GLL  $(\xi_j, \xi_k)$ ,  $0 \leq j, k \leq N$ , sur  $\hat{Q}$ , qui sont utilisés à la fois comme points d'interpolation et comme points de quadrature (avec des poids appropriés),
- des matrices de dérivation d'une fonction par rapport aux variables  $r, s$ ,
- une base orthonormale dans  $L^2(\hat{Q})$  pour  $\mathbb{Q}_N(\hat{Q})$  composée des polynômes de Legendre,
- une base nodale pour  $\mathbb{Q}_N(\hat{Q})$  composée des polynômes de Lagrange associés aux nœuds GLL dans  $\hat{Q}$ ,

*et globalement*,

- un maillage conforme sur  $\Omega$  de quadrilatères  $Q$ ,
- une famille d'applications  $\{g_Q : \hat{Q} \rightarrow Q\}_{Q \in \tau_h}$  à matrice Jacobienne  $\{J_Q\}_{Q \in \tau_h}$ ,
- un produit discret sur  $\Omega$  défini par (8).

## 2.2 La méthode TSEM, Fekete-Gauss sur triangles

Considérons maintenant un élément de référence triangulaire,

$$\hat{T} = \{(r, s) : r, s \geq -1, r + s \leq 0\}, \quad (10)$$

et soit  $\mathcal{P}_N(\hat{T})$  l'espace des polynômes définis sur  $\hat{T}$  de degré total inférieur au égal à  $N$ . Les points GLL ne sont connus que sur des domaines obtenus par produit tensoriel à partir d'un intervalle de l'axe réel, et il n'est pas évident de les définir sur une géométrie quelconque, par exemple un triangle. À défaut des points GLL, quels autres points utiliser pour approcher la fonction  $u$  dans  $\hat{T}$  ? Comment calculer les dérivées de  $u$  par rapport à  $r$  et  $s$  sur  $\hat{T}$  ? Et encore, quelle formule de quadrature utiliser pour calculer les intégrales du problème variationnel le plus précisément possible ?

Différentes stratégies ont été proposées, des plus simples comme celle de considérer les points GLL de  $\hat{Q}$  contenus dans  $\hat{T}$  [83] ou de transporter  $\hat{Q}$  sur  $\hat{T}$  [73], aux plus sophistiquées basées sur la minimisation d'une énergie [34, 64] (voir [35, 65] pour la dimension 3). Ici on s'intéresse à la méthode TSEM introduite dans [113, 119], basée sur l'utilisation des points du mathématicien hongrois Michael Fekete (1886-1957) [114] comme points d'interpolation sur  $\hat{T}$ . Dans [FR36] on présente la méthode dans sa première version, pour la perfectionner plus tard dans [FR37]. En voici les aspects essentiels.

Remarquons au préalable que dans le cas de la méthode TSEM, le rôle des polynômes de Legendre est joué par les polynômes de Koornwinder-Dubiner (KD) [45] qui forment une base orthogonale de  $\mathcal{P}_N$ . Sur le triangle de référence  $\hat{T}$ , les polynômes KD suivants sont orthonormés dans  $L^2(\hat{T})$ , muni du produit scalaire  $(f, g) = \int_{\hat{T}} f(r, s) g(r, s) dr ds$ :

$$\psi_{ij}(r, s) = c_{ij} P_i^{0,0} \left( \frac{2r+s+1}{1-s} \right) \left( \frac{1-s}{2} \right)^i P_j^{2i+1,0}(s), \quad i, j \geq 0, i+j \leq N, \quad (11)$$

où  $c_{ij} = \sqrt{(2i+1)(i+j+1)/2}$  et  $P_i^{\alpha,\beta}(x)$  sont les polynômes de Jacobi [1]. Dans la suite, ces polynômes seront notés  $\psi_k$ ,  $1 \leq k \leq n = (N+1)(N+2)/2$ , pour n'importe quelle bijection entre les indices  $i, j$  et  $k$ . On suppose cependant que le polynôme constant est  $\psi_1(r, s) = 1/\sqrt{2}$ .

### 2.2.1 Les points de Fekete

Les points de Fekete sont liés à la recherche d'un ensemble de points optimaux pour définir l'interpolant  $I_N$  pour des fonctions  $u \in \mathcal{C}^0(\hat{T})$ , c'est-à-dire, des points caractérisés par une faible constante de Lebesgue  $\|I_N\|_\infty$  (voir [34] pour une analyse sur la qualité de l'interpolation polynomiale et le calcul de points presque optimaux sur un triangle). Presque rien n'est connu à ce sujet en dimension supérieure à un. Or, bien que ne minimisant pas la constante de Lebesgue, les points GLL sont satisfaisants du point de vue de l'interpolation sur quadrilatères ou hexaèdres.

Pour définir les points de Fekete, on considère une base polynomiale  $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$  de  $\mathcal{P}_N(\hat{T})$  et on construit la matrice  $V$  de Vandermonde avec  $V_{ij} = \varphi_j(\hat{\mathbf{y}}_i)$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , où les  $\hat{\mathbf{y}}_i$  sont  $n$  points quelconques de  $\hat{T}$ .

**Définition 2.1** *Pour une base polynomiale fixée de  $\mathcal{P}_N(\hat{T})$ , les points de Fekete  $\{\hat{\mathbf{x}}_j\}_{j=1}^n$  sont ceux qui maximisent le déterminant de la matrice de Vandermonde sur  $\hat{T}$ .*

Le calcul des points de Fekete nécessite la résolution d'un problème d'optimisation en haute dimension et n'est pas du tout trivial. Les points de Fekete qu'on a utilisés dans la suite sont ceux calculés dans [114] jusqu'au degré  $N = 18$ .

Les points de Fekete sont une généralisation possible des points GLL pour les domaines qui ne sont pas produit tensoriel d'intervalles. Ceci est lié à la proposition 2.2, prouvée dans [51] pour  $d = 1$  et dans [19] pour  $d > 1$ .

**Proposition 2.2** *Les points de Fekete coïncident avec les points GLL sur les produits tensoriels d'intervalles.*

Les principales propriétés de ces points sont présentées dans [18, 114]. On a notamment:

- (pr1) La définition des points de Fekete ne dépend pas du choix de la base polynomiale  $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ . Un changement de base revient en effet à multiplier le déterminant par une constante (qui est le déterminant de la matrice de changement de base).
- (pr2) Les points de Fekete peuvent être définis pour tout domaine.
- (pr3) Les polynômes de Lagrange  $\ell_j$  associés à ces points prennent la valeur maximale en ces points, *i.e.*,  $\ell_j(\hat{x}) \leq 1$ , pour tout  $\hat{x} \in \hat{T}$ .
- (pr4) La formule de quadrature basée sur ces points n'est exacte que dans  $\mathcal{P}_N(\hat{T})$ .
- (pr5) Les points de Fekete ne sont pas des points de Lebesgue (c'est-à-dire, les points qui minimisent la constante de Lebesgue). D'autre part, pour ces points on a numériquement  $\|I_N\|_\infty \approx N$ , contre une croissance exponentielle pour des points équidistribués.
- (pr6) Les points de Fekete sur le bord de  $\hat{T}$  coïncident avec les GLL 1D (cette propriété permet donc d'avoir des maillages conformes de triangles et de quadrilatères mélangés, voir [76] pour une application en élastodynamique). Pour un degré d'interpolation  $N$ , on a  $n = (N + 1)(N + 2)/2$  points de Fekete sur  $\hat{T}$ , avec  $N + 1$  points sur chacun des côtés de  $\hat{T}$  (*i.e.*  $3N$  points de Fekete sur le bord de  $\hat{T}$ ).

Les points de Fekete sont utilisés dans la méthode  $TSEM$  comme points d'interpolation, *i.e.*, les fonctions de base de la méthode  $TSEM$  sont les polynômes de Lagrange  $\ell_j$  associés à ces points.

## 2.2.2 Formules de quadrature

Les points de Fekete n'ont pas d'aussi bonnes propriétés que les points GLL vis-à-vis de la quadrature (voir (pr4)). Pourtant, une formule de quadrature de haute précision est indispensable afin de garder la “convergence  $hp$ ” des méthodes SEM basées sur des formulations variationnelles. Cet aspect de la question a motivé des recherches dans deux directions: d'un côté, on cherche un ensemble de points qui aient de bonnes propriétés d'interpolation et de quadrature sur  $\hat{T}$  [115, 123], d'un autre côté, on cherche à développer des formules de quadrature plus sophistiquées [119]. Notre recherche se situe plutôt dans le deuxième cadre.

La première version de la méthode SEM sur triangles [113] étudiée dans [FR36] est basée sur la formule de quadrature suivante:

$$I = \int_T uv \approx \sum_{i=1}^n (u \circ g_T)(\hat{\mathbf{x}}_i)(v \circ g_T)(\hat{\mathbf{x}}_i) |J_T(\hat{\mathbf{x}}_i)| \omega_i, \quad (12)$$

avec  $\omega_i = \sqrt{2}(V^{-1})_{1i}$ ,  $1 \leq i \leq n$  et  $g_T : \hat{T} \rightarrow T$  une application de matrice Jacobienne  $J_T$ . Ce résultat est minimal dans le sens que la formule (12) est exacte pour  $(uv) \in \mathcal{P}_N(\hat{T})$ . Si la matrice de masse reste diagonale comme pour la méthode QSEM, la “convergence  $hp$ ” de la méthode est perdue [FR37].

Une première amélioration [FR36] peut être proposée dans le cas où l'application  $g_T$  est linéaire (le triangle  $T$  n'a donc que des côtés droits et le jacobien  $|J_T|$  est constant). Soit  $\{\hat{u}_i\}_{i=1}^n$  le spectre du polynôme interpolant de  $u \circ g_T$  sur la base des polynômes KD  $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ . Alors

$$I \approx |J_T| \left( \sum_{i=1}^n \hat{u}_i \psi_i, \sum_{j=1}^n \hat{v}_j \psi_j \right) = |J_T| \sum_{k=1}^n \hat{u}_k \hat{v}_k.$$

Considérait que  $\ell_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n V_{ij}^{-t} \psi_j(\mathbf{x})$ , où  $V$  est la matrice de Vandermonde,

$$\hat{u}_k = \left( \sum_{i=1}^n u_i \ell_i, \psi_k \right) = \sum_{i=1}^n u_i (\ell_i, \psi_k), \quad (\ell_i, \psi_k) = V_{ik}^{-t} = V_{ki}^{-1},$$

où  $u_i$  est la valeur de  $u \circ g_T$  au  $i$ ème point d'interpolation. On voit alors que

$$I \approx |J_T| \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n u_i V_{ki}^{-1} \right) \left( \sum_{j=1}^n v_j V_{kj}^{-1} \right) = |J_T| \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^n v_j \sum_{k=1}^n V_{ki}^{-1} V_{kj}^{-1}.$$

Sous forme matricielle, on obtient donc la formule de quadrature suivante:

$$I \approx |J_T| \mathbf{u}^t \mathbf{W} \mathbf{v}, \quad \mathbf{W} = \mathbf{V}^{-t} \mathbf{V}^{-1} \quad (13)$$

Dans le cas linéaire, la formule (13) est exacte par construction ( $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{P}_N$ ) pour  $(uv) \in \mathcal{P}_{2N}$ . D'autre part, on remarque que la matrice de masse élémentaire n'est plus

diagonale mais proportionnelle à  $|J_T|\mathbf{W}$ . Dans le cas non-linéaire, le jacobien n'est plus constant. Une première approche est basée sur la définition de la matrice  $W$  comme  $W = \mathbf{J}_T^{1/2}V^{-t}V^{-1}\mathbf{J}_T^{1/2}$  avec  $\mathbf{J}_T = \text{diag}\{J_1, \dots, J_n\}$ ,  $J_i = J_T(\hat{\mathbf{x}}_i)$ . Une approche plus précise mais coûteuse est celle proposée dans [66] où la matrice  $\mathbf{W}$  dépend de la forme du triangle  $T$ . Ses éléments  $\mathbf{W}_{kl} = \int_{\hat{T}} \psi_k(\hat{\mathbf{x}}) \psi_l(\hat{\mathbf{x}}) J_T(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}}$  sont calculés exactement à l'aide d'une sur-intégration et mémorisés pour les triangles courbes.

Pour garder la "convergence de type  $hp$ " de la méthode SEM en présence de triangles courbes, nous avons proposé de séparer l'ensemble des points d'interpolation de celui des points de quadrature (méthode TSEM-3 dans [FR37]). Quels points de quadrature utiliser alors dans  $\hat{T}$  ? Les formules de quadrature sur  $\hat{T}$  basées sur des points de Gauss [38, 109, 118] ne sont pas connues ou accessibles pour  $N \gg 1$ . Il est toujours possible d'utiliser des formules de quadrature basées sur des points de Gauss en adoptant une application  $\mathbf{h} : \hat{Q} \rightarrow \hat{T}$ , du quadrilatère de référence  $\hat{Q}$  sur le triangle de référence  $\hat{T}$ . Cette application est décrite dans [73] pour  $d = 2$  et  $d = 3$ . Il est aussi suggéré d'utiliser les points et les poids de quadrature associés avec le produit tensoriel de polynômes de Jacobi  $J_i^{1,0}$ ,  $0 \leq i \leq N_Q$ . Ces polynômes sont orthogonaux avec une fonction poids proportionnelle au jacobien de l'application  $\mathbf{h}$ . Avec une telle formule de quadrature, les points ne sont plus distribués de façon symétrique dans  $\hat{T}$  et leur nombre est maximal:  $(N_Q + 1)^2$  points sont nécessaire pour intégrer exactement sur  $\hat{T}$  polynômes de degré  $M = 2N_Q + 1$  selon chaque variable. Par ailleurs, il est possible de sous-intégrer, c'est-à-dire d'utiliser une formule de quadrature exacte dans  $\mathcal{P}_{2N-3}(\hat{T})$  plutôt que  $\mathcal{P}_{2N}(\hat{T})$ , sans détériorer la précision spectrale de la méthode TSEM : asymptotiquement, la décroissance de l'erreur reste exponentielle par rapport au degré  $N$ . Sur le triangle  $\hat{T}$ , on considère donc la formule suivante

$$(u, v)_{\hat{T}, N} = \sum_{j=1}^m u(\hat{\mathbf{y}}_j) v(\hat{\mathbf{y}}_j) \omega_j, \quad (14)$$

où  $\{\hat{\mathbf{y}}_j\}_{j=1}^m$  est l'ensemble des points de quadrature et  $m$  sa cardinalité. En général, sur  $\Omega$ ,

$$(u, v)_{\Omega, N}^T = \sum_{T \in \tau_h} \sum_{j=1}^m (u \circ g_T)(\hat{\mathbf{y}}_j) (v \circ g_T)(\hat{\mathbf{y}}_j) |J_T(\hat{\mathbf{y}}_j)| \omega_j. \quad (15)$$

Le problème variationnel discret s'écrit donc:

$$\text{Trouver } u \in V_{T, N} \text{ tel que } a_{T, N}(u, v) = (f, v)_{T, N} \text{ pour tout } v \in V_{T, N}, \quad (16)$$

où la forme bilinéaire  $a_{T, N}(\cdot, \cdot)$  est obtenue à partir de  $a(\cdot, \cdot)$  définie dans (3) en remplaçant l'intégrale sur  $\Omega$  par la formule de quadrature (15) et l'espace discret est

$$V_\delta = V_{T, N} = \{u \in V : u|_T \circ g_T \in \mathcal{P}_N(\hat{T}), \forall T \in \tau_h\}.$$

Le problème discret est équivalent à un système linéaire de la forme  $A_T \mathbf{u} = \mathbf{b}$  où  $A_T$  est la matrice TSEM assemblée,  $\mathbf{b}$  le vecteur tenant compte de la source  $f$ , et  $\mathbf{u}$  le vecteur

des inconnues qui sont les valeurs de la fonction  $u$  aux points de Fekete internes à  $\Omega$  (on rappelle que l'on considère ici des conditions aux limites de Dirichlet homogènes). La matrice  $A_T$  est somme de deux matrices, une matrice de raideur qui tient compte de la partie div grad du problème discret, et une matrice de masse qui tient compte de l'autre terme. Cette deuxième matrice n'est plus diagonale du fait que les nœuds de quadrature ne coïncident plus avec les points d'interpolation.

### 2.2.3 Matrices de dérivation

Afin de calculer les valeurs d'une fonction et de ses dérivées en des points de  $\hat{T}$  différents des points d'interpolation, on est amené à introduire une matrice d'interpolation et des matrices de dérivation. Soient donc  $\{\hat{\mathbf{y}}_i\}_{i=1}^m$  les points de quadrature sur  $\hat{T}$  où l'on veut calculer la valeur et les dérivées d'une fonction  $u \in \mathcal{P}_N(\hat{T})$  connue aux points d'interpolation  $\{\hat{\mathbf{x}}_j\}_{j=1}^n$  (points de Fekete). On note  $\mathbf{u}$  le vecteur des valeurs  $u_i = u(\hat{\mathbf{x}}_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , et  $\mathbf{u}'$  le vecteur des valeurs  $u'_i = u(\hat{\mathbf{y}}_i)$ ,  $1 \leq i \leq m$ . De même, on note  $V_{ij} = \psi_j(\hat{\mathbf{x}}_i)$  et  $V'_{ij} = \psi_j(\hat{\mathbf{y}}_i)$  les éléments des deux matrices de Vandermonde construites avec les polynômes KD pour les deux ensembles de points donnés. On peut exprimer le vecteur  $\mathbf{u}'$  en fonction du vecteur  $\mathbf{u}$  en utilisant les composantes  $\hat{u}_j$  de  $u$  sur la base des polynômes KD, c'est-à-dire, en écrivant  $u(\hat{\mathbf{x}}_i) = \sum_{j=1}^n \hat{u}_j \psi_j(\hat{\mathbf{x}}_i) = \sum_{j=1}^n V_{ij} \hat{u}_j$ . Sous forme matricielle, on a  $\mathbf{u} = V \hat{\mathbf{u}}$  et alors  $\mathbf{u}' = V' \hat{\mathbf{u}} = V' V^{-1} \mathbf{u}$ . Sur un triangle  $T$  quelconque du maillage, étant donné que  $T = g_T(\hat{T})$ , on aura la même relation entre  $\mathbf{u}'$  et  $\mathbf{u}$  pourvu que  $u_i = (u \circ g_T)(\hat{\mathbf{x}}_i)$  et  $u'_i = (u \circ g_T)(\hat{\mathbf{y}}_i)$ .

Pour construire

$$D'_{ij}{}^r = \partial_r \ell_j(\hat{\mathbf{y}}_i), \quad D'_{ij}{}^s = \partial_s \ell_j(\hat{\mathbf{y}}_i),$$

on ne peut pas procéder comme on le fait pour la méthode QSEM, c'est-à-dire, par produit tensoriel d'opérateurs monodimensionnels [97]. On utilise une technique similaire à celle de la méthode FEM, qui s'appuie sur la composition d'opérateurs bidimensionnels. On utilise ici les polynômes KD  $\psi_j$  exprimés sur la base de Lagrange,

$$\psi_j(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{k=1}^n \psi_j(\hat{\mathbf{x}}_k) \ell_k(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{k=1}^n V_{kj} \ell_k(\hat{\mathbf{x}})$$

et en différentiant ces polynômes par rapport à  $r$  et  $s$ , et en les exprimant aux points  $\hat{\mathbf{y}}_i$ , on obtient

$$D'^r = V'^r V^{-1}, \quad D'^s = V'^s V^{-1}$$

où  $V'^r = \partial_r \psi_j(\hat{\mathbf{y}}_i)$ . Une fois que les matrices  $D'^r$  et  $D'^s$  sont connues, on peut appliquer la composition d'opérateurs pour les avoir sur n'importe quel triangle  $T$  du maillage. Les polynômes KD  $\psi_j$  sont ici utilisés car on calcule facilement leurs dérivées et la matrice de Vandermonde à inverser est bien conditionnée. On note que les matrices de dérivation  $D'^r$  et  $D'^s$  sont ici de dimension  $m \times n$  avec  $m \approx n$ , contre la taille  $(N+1) \times (N+1)$  de celles pour le quadrangle. Pour un résultat sur la complexité des calculs, voir par

exemple [FR42], mais en gros on peut affirmer que pour la méthode  $QSEM$ , grâce à la tensorisation, la complexité est  $O(N^{d+1})$ , alors que pour la méthode  $TSEM$ , c'est (malheureusement)  $O(N^{2d})$ .

#### 2.2.4 Résultats numériques pour la méthode $TSEM$ : précision et application à l'électromagnétisme

La précision et les performances de la méthode  $TSEM$  que l'on vient de décrire, s'appuyant sur deux ensembles distincts de points pour l'interpolation (Fekete) d'une part et la quadrature (Gauss) de l'autre, ont été étudiées dans [FR37]. La "convergence  $hp$ " de la méthode est conservée même en présence de triangles à côtés courbes (liés donc au triangle de référence  $\hat{T}$  par une application  $g_T$  non-linéaire).

Dans [FR36], la méthode  $TSEM$  a été utilisée pour résoudre le problème (extérieur, en deux dimensions) de diffraction d'une onde plane par un obstacle conducteur [88]. Il s'agit d'un problème très classique de propagation d'ondes qui permet de tester/valider une méthode numérique donnée, dans notre cas la méthode  $TSEM$ . L'idée à la base de cette application est la possibilité d'exploiter l'aspect "spectral" de la méthode  $TSEM$ , qui porte, pour une erreur fixée de  $\approx 10\%$ , à utiliser un nombre "petit" (4 ici) d'éléments par longueur d'onde, à la différence des 10 nécessaires dans une approche FEM classique. On considère donc un obstacle  $\Omega_c$  de  $\mathbb{R}^2$  de forme carrée centré à l'origine des axes du plan cartésien, en position oblique de  $\pm \frac{\pi}{4}$  par rapport aux axes, sur lequel va se diffracter une onde harmonique en temps qui se propage avec une vitesse constante  $c$  dans la direction  $x$ . En partant de l'équation d'ondes  $\partial_t^2 U - c^2 \Delta U = 0$ , on cherche la solution  $U$  harmonique en temps, combinaison de l'onde incidente et de celle diffractée  $U(t, \mathbf{x}) = \text{Re}[e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} + u(\mathbf{x})e^{-i\omega t}]$  (seule la composante réelle a une signification physique). Alors, l'amplitude  $u$  de l'onde diffractée est solution de l'équation de Helmholtz  $-\Delta u - |\mathbf{k}|^2 u = 0$ , où  $|\mathbf{k}| = \omega/c$  est le nombre d'onde. Le problème extérieur étant posé dans un milieu ouvert, on introduira un bord artificiel  $\Gamma_A$ , de forme simple (un cercle  $D(0, R)$  de rayon  $R$  centré à l'origine des axes), de normale extérieure sortante  $n$ , entourant l'obstacle, sur lequel on imposera des conditions aux limites absorbantes d'ordre un [49]. De plus, en exploitant la symétrie du problème, on ne considère que la portion du domaine extérieur à l'obstacle contenu dans  $\{(x, y); y \geq 0\} \cap D(0, R)$  et on appelle  $\Omega$  le domaine compris entre le bord de l'obstacle  $\Gamma_D$ , le bord artificiel  $\Gamma_A$ , et le bord de symétrie  $\Gamma_N$ . Le problème à résoudre est le suivant:

$$\begin{aligned} -\Delta u - |\mathbf{k}|^2 u &= 0, & \text{dans } \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= -e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, & \text{sur } \Gamma_D, \\ \partial_y u &= 0, & \text{sur } \Gamma_N, \\ \partial_n u &= i|\mathbf{k}|u, & \text{sur } \Gamma_A. \end{aligned} \tag{17}$$

Le problème (17) est bien posé [88]. Une difficulté dans le traitement numérique de (17) est liée au fait que la solution  $u$  est une fonction à valeurs complexes, à cause des conditions aux limites sur  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_A$ . La taille du problème discret à résoudre dépend du degré d'approximation polynomiale  $N$  dans chaque triangle du maillage (les points de

Fekete correspondants constituent le “micromaillage”) et du nombre total de triangles dans le maillage de  $\bar{\Omega}$  (appelé “macromaillage”). Même en l’absence d’une solution analytique pour ce problème, on a effectué une étude de l’erreur en choisissant comme solution de référence celle obtenue pour  $N$  grand ( $N = 15$ ) sur un macromaillage assez fin (nombre total d’inconnues  $\approx 10^4$ ). À partir des résultats obtenus, on peut conclure que le choix correct de  $N$  dépend de la finesse du macromaillage et de la longueur d’onde  $\lambda = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|}$ .

En ce qui concerne la méthode  $TSEM$ , on a pu apprécier la grande flexibilité de la méthode due à l’introduction des matrices de dérivation, qui permettent de calculer les dérivées aux points de quadrature de fonctions connues aux points d’interpolation, aspect nouveau dans le cadre des méthodes SEM. De plus, on a la possibilité de sous-intégrer, obtenant ainsi des matrices de dérivation de taille plus petite. La mise en œuvre de la méthode  $TSEM$  change peu par rapport à celle d’une méthode FEM classique. Le point faible de la méthode  $TSEM$  est le mauvais conditionnement de la matrice du système linéaire à résoudre vis-à-vis du degré d’approximation polynomiale  $N$ . Cet aspect nous a poussé à l’étude de préconditionneurs pour la matrice  $A_T$  [FR24, FR41, FR42], comme on le décrira dans la suite. L’étude et le développement de préconditionneurs pour les systèmes algébriques émanant des approximations SEM et plus généralement d’ordre élevé est un sujet très actif à l’heure actuelle. Des algorithmes très performants ont été construits et analysés pour la méthode  $QSEM$  (voir par exemple [93, 119, 32, 42]), alors que dans le cas de la méthode  $TSEM$  ou d’autres s’appuyant sur des éléments qui ne sont pas produit tensoriel d’intervalles, de nombreux problèmes restent ouverts.

### 2.3 Résolution du système linéaire pour $QSEM$ et $TSEM$

L’efficacité de la résolution d’un système linéaire dépend grandement du nombre de conditionnement de la matrice à inverser. On rappelle que le nombre de conditionnement d’une matrice carrée inversible  $A$ , que l’on notera  $\kappa(A)$ , est la racine carrée du quotient de la plus grande valeur singulière de  $A$  à la plus petite. Lorsque la matrice  $A$  est symétrique définie positive, comme c’est le cas ici pour  $A_Q$  et  $A_T$ ,  $\kappa(A)$  coïncide avec le quotient de la plus grande valeur propre de  $A$  à la plus petite.

**Proposition 2.3** *Pour le problème de Poisson en dimension deux avec condition au bord de type Dirichlet, la matrice de raideur  $K_Q$  de la méthode  $QSEM$  a un nombre de conditionnement  $O(N^3 h^{-2})$ , où  $h$  est la taille des quadrilatères du maillages et  $N$  le degré d’approximation polynomiale [84].*

Un préconditionnement de la matrice  $K_Q$  est donc nécessaire pour la résolution rapide du problème discret. Les premiers travaux sont présentés dans [89]: le préconditionneur est donné par une matrice de différences finies centrées sur un maillage composé des nœuds GLL. Plus tard, dans [40, 42], il a été proposé d’utiliser une matrice des éléments finis linéaires ou bilinéaires,  $K_h$ , appliquée sur un maillage de  $\Omega$  ayant comme sommets les

nœuds GLL de  $\Omega$ . Ce type de préconditionneur a été généralisé dans la suite [27, 41, 98] et son efficacité tient au résultat suivant:

**Proposition 2.4** *Les matrices  $K_Q$  et  $K_h$  sont spectralement équivalentes, c'est-à-dire que le nombre de conditionnement de la matrice  $K_h^{-1}K_Q$  est optimal<sup>3</sup>, uniformément borné indépendamment du degré d'approximation polynomiale  $N$  et de la taille  $h$  des éléments spectraux (quadrilatères) [29].*

Pour la méthode TSEM, on a le résultat numérique suivant:

**Conjecture 2.5** *Pour le problème de Poisson en dimension deux avec condition au bord de type Dirichlet, la matrice de raideur  $K_T$  de la méthode TSEM présente un nombre de conditionnement  $O(N^4h^{-2})$ , où  $h$  est la taille des triangles du maillage et  $N$  le degré d'approximation polynomiale [FR36].*

Le comportement  $O(N^4)$  du nombre de conditionnement par rapport au degré  $N$  pour  $K_T$  est moins bon que celui de  $K_Q$  mais reste acceptable. En effet, dans [71], on prouve que le nombre de conditionnement de la matrice associée à une méthode  $hp$ -FEM est  $O(N^{4(d-1)})$  où  $d$  est la dimension de l'espace. Le problème avec la méthode TSEM est que la proposition 2.4 n'est plus valable pour  $K_T$ , c'est-à-dire, la matrice  $K_h$  d'éléments finis linéaires sur triangles ayant comme sommets les points de Fekete d'un maillage de  $\Omega$  n'est plus un préconditionneur optimal pour  $K_T$  ( $\kappa(K_h^{-1}K_T) = O(N)$ , voir [119]). On a donc<sup>4</sup> étudié d'autres types de préconditionneurs issus de la décomposition de domaine.

Par décomposition de domaine on entend la reformulation du problème initial (ou de son approximation) en un ensemble de problèmes couplés sur des domaines plus petits, qui forment une partition du domaine  $\Omega$  original. Cette reformulation peut se faire au niveau de la discrétisation (méthode de type mortar, maillages non-conformes, dont un exemple est traité dans le dernier chapitre de ce mémoire, couplage d'éléments  $h$  et  $p$ ) ou au niveau de la résolution du système algébrique (préconditionnement, dont on parle ici) qui vient de l'approximation de l'EDP. En ce qui concerne le préconditionnement des systèmes linéaires, les méthodes de décomposition de domaines appartiennent à deux groupes, selon le type de partition en sous-domaines [107]: avec recouvrement (méthodes de type Schwarz) ou sans recouvrement (méthodes à sous-structures). Pour compléter les solveurs locaux sur les sous-domaines, un solveur grossier doit généralement être ajouté au préconditionneur, afin que le taux de convergence soit indépendant du nombre de sous-domaines (méthode *scalable*).

---

<sup>3</sup>Un préconditionneur  $F$  peut être défini comme *optimal* si  $\kappa(FK)$  dépend "faiblement" du paramètre  $h$  de discrétisation spatiale. En général, une dépendance de la forme  $O((1 + \log(\frac{1}{h}))^\alpha)$ , avec  $\alpha$  "petit", est considérée faible. Les techniques de décomposition de domaine permettent de définir de tels préconditionneurs.

<sup>4</sup>En collaboration avec Luca Pavarino et Elena Zampieri, professeurs au Département de Mathématiques de l'Università degli Studi di Milano, Italie. La collaboration avec M. Pavarino et Mme Zampieri, a été indispensable pour m'initier aux préconditionneurs issus de la décomposition de domaine.

### 2.3.1 Préconditionneur de type Schwarz pour QSEM et TSEM

On va maintenant revoir les aspects essentiels de la construction d'un preconditionneur de type Schwarz pour les matrices  $A_Q$  et  $A_T$  (pour une introduction générale à ce sujet, voir [97, 116, 107, 44]). On a

$$\bar{\Omega} = \cup_{k=1,K} \bar{\Omega}_k$$

avec  $\Omega_k \equiv Q$  (resp.  $T$ ),  $Q(T)$  éléments d'un maillage  $\tau_h$ , et on rappelle que la partition en sous-domaines est conforme. Si  $H$  dénote la taille maximale des sous-domaines  $\Omega_k$  et  $h$  celle des éléments ( $T$  ou  $Q$ ) dans les sous-domaines, le cas de sous-domaines composés d'un seul élément spectral, étudié pour TSEM dans [FR24], se traduit par  $H = h$  (l'autre cas, étudié pour TSEM dans [FR42], étant  $H > h$ ).

**QSEM.** Le maillage grossier  $\tau_0$  sur  $\Omega$  est composé des quadrilatères  $\Omega_k$  sur lesquels on utilise une méthode d'éléments finis bilinéaires (de degré  $N = 1$  en chaque direction) pour obtenir le problème grossier. Le maillage fin  $\tau_N$  est défini par les points GLL de chaque quadrilatère  $\Omega_k$ . On construit la partition de  $\Omega$  en sous-structures, en élargissant les  $\Omega_k$  à des sous-domaines  $\Omega'_k$  plus grands incluant tous les points de  $\tau_N$  qui sont dans  $\Omega_k$  et dans les éléments voisins mais à une certaine distance de  $\Omega_k$ . On mesure cette distance par le nombre  $\delta$  de points GLL qui étendent  $\Omega_k$  dans chaque direction (on parle ainsi de recouvrement partiel de taille  $\delta$ , voir par exemple [31, 52, 53, 74]).

**TSEM.** Le maillage grossier  $\tau_0$  sur  $\Omega$  est composé des triangles  $\Omega_k$  sur lesquels on utilise une méthode d'éléments finis linéaires (de degré total  $N = 1$ ) pour obtenir le problème grossier. Le maillage fin  $\tau_N$  est défini par les points de Fekete de chaque triangle  $\Omega_k$ . On construit la partition de  $\Omega$  en sous-structures, en élargissant les  $\Omega_k$  à des sous-domaines  $\Omega'_k$  plus grands incluant tous les triangles  $\Omega_j \neq \Omega_k$  qui partagent avec  $\Omega_k$  un sommet ou une arête (on parle ainsi de recouvrement total). Deux remarques: (i) on ne sait pas définir pour les points de Fekete un recouvrement partiel simple, du fait que ces points ne sont pas distribués de façon tensorielle dans les  $\Omega_k$ ; (ii) un recouvrement total incluant moins d'éléments (par exemple seulement les  $\Omega_j$  qui partagent avec  $\Omega_k$  une arête) n'est pas satisfaisant numériquement.

Le preconditionneur de type Schwarz est alors basé sur (a) la résolution du problème grossier avec éléments finis  $V_0$  linéaires (pour la méthode TSEM) ou bilinéaires (pour la méthode QSEM) sur le maillage  $\tau_0$ , (b) la résolution de  $K$  problèmes locaux dans l'espace  $V$  associés aux sous-domaines  $\Omega'_k$ . Pour le preconditionneur grossier, on a besoin de définir une matrice de restriction  $R_0$  du maillage fin au maillage grossier et une matrice de raideur  $A_0$  pour la résolution du problème grossier sur  $\tau_0$ . Soient  $\{\phi_i^H\}_{i=1,n_H}$  une base de  $V_0$ ,  $\{\phi_j^h\}_{j=1,n_h}$  une base de  $V$  et  $\{x_j^h\}_{j=1,n_h}$  les points du maillage fin. Dans notre cas  $V_0 \subset V$ , alors on a

$$\phi_i^H(x) = \sum_{j=1}^{n_h} r_{ij} \phi_j^h(x) \quad \text{avec} \quad r_{ij} := \phi_i^H(x_j^h),$$

et l'opérateur  $R_0^t : V_0 \rightarrow V$  a par éléments les valeurs  $r_{ij}$  (il représente une interpolation

linéaire d'une fonction définie sur  $\tau_0$  au points du maillage  $\tau_N$ ). La matrice  $A_0$  est donnée par  $R_0 A R_0^t$  où  $A$  coïncide avec  $A_T$  ou  $A_Q$  selon le cas considéré.

Pour le préconditionneur fin, on a besoin des matrices de restriction  $R_k$  aux sous-domaines  $\Omega'_k$  et des matrices de raideur locales pour la résolution du problème local dans  $\Omega'_k$  avec des conditions de type Dirichlet homogènes sur  $\partial\Omega'_k$  (on rappelle que  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ ). La forme additive du préconditionneur de type Schwarz s'écrit comme suit:

$$F_{OS} = R_0^t A_0^{-1} R_0 + \sum_{k=1}^K R_k^t A_k^{-1} R_k. \quad (18)$$

Le terme  $R_0^t A_0^{-1} R_0$  est la partie grossière du préconditionneur qui se charge d'éliminer les composantes basse fréquence de l'erreur, et le terme  $\sum_{k=1}^K R_k^t A_k^{-1} R_k$  est la partie fine du préconditionneur qui se charge localement dans les sous-domaines d'éliminer les composantes haute fréquence de l'erreur. Des variantes multiplicatives ou hybrides de ce préconditionneur sont données dans [107] et [116]. Le résultat suivant est prouvé dans [116] et basé sur la théorie développée dans [31]:

**Proposition 2.6** *Le nombre de conditionnement de la matrice  $F_{OS} A_Q$  pour la méthode QSEM vérifie*

$$\kappa(F_{OS} A_Q) \leq C \left(1 + \frac{H}{\delta^*}\right), \quad \delta^* = \min_{k=1}^K \{\text{dist}(\partial\Omega_k, \partial\Omega'_k)\}$$

où la constante  $C$  ne dépend pas de  $N, H, h, \delta$ .

Dans le cas d'un recouvrement minimal,  $\delta = 1$  et  $\delta^* \approx h/N^2$  (en effet le deuxième point de quadrature est à une distance  $1/N^2$  du bord de l'élément), le résultat de la proposition 2.6 devient

$$\kappa(F_{OS} A_Q) \leq C \left(1 + \frac{H}{h} N^2\right),$$

c'est-à-dire, le nombre d'itérations augmente comme  $N$  pour une valeur fixée de  $H/h$ , alors qu'il se comporte comme  $\sqrt{H/h}$  pour une valeur fixée de  $N$ . Dans le cas d'un recouvrement total,  $\delta = N$  et  $\delta^* = h$ , le résultat de la proposition 2.6 devient

$$\kappa(F_{OS} A_Q) \leq C \left(1 + \frac{H}{h}\right),$$

c'est-à-dire, le nombre d'itérations ne dépend plus de  $N$  et se comporte comme  $\sqrt{H/h}$  pour une valeur fixée de  $N$ . La même limitation reste valable aussi dans le cas où le coefficient  $\alpha$  du problème elliptique considéré est discontinu (voir les résultats obtenus dans [FR42]). La preuve de la proposition 2.6 est basée sur la propriété d'équivalence spectrale de la proposition 2.4 entre les matrices (de raideur et de masse) de la méthode QSEM et celles de la méthode FEM basé sur les nœuds GLL. Dans le cas TSEM, la propriété d'équivalence spectrale n'est plus valable et on ne connaît pas des préconditionneurs

avec recouvrement partiel entre les sous-domaines. Dans le cas des méthodes  $hp$ -FEM sur un maillage non-structuré d'un domaine qui n'est pas produit tensoriel d'intervalles, les bornes sur le nombre de conditionnement présentées (voir [31, 91]) ne sont plus valables. On peut toujours construire des préconditionneurs avec recouvrement total comme on l'a indiqué et les résultats numériques dans [FR24, FR42] montrent que ce type de préconditionneur est optimal et scalable. On peut donc conjecturer un résultat similaire à la proposition 2.6 pour la méthode TSEM.

**Conjecture 2.7** *Dans le cas d'un recouvrement total ( $\delta^* = h$ ), le nombre de conditionnement de la matrice  $F_{OS}A_T$  pour la méthode TSEM vérifie*

$$\kappa(F_{OS}A_T) \leq C\left(1 + \frac{H}{h}\right),$$

où la constante  $C$  ne dépend pas de  $N, H, h$ .

### 2.3.2 Préconditionneur à sous-structures pour TSEM

Dans cette section on va présenter la construction d'un préconditionneur à sous-structures, de la famille Neumann-Neumann (NN), pour la matrice  $A_T$  (on renvoie à [116, 107] pour une introduction générale sur ce type de préconditionneur, à [92, 94] pour le cas d'éléments spectraux sur quadrilatères, et à [16] pour le cas de la méthode  $p$ -FEM). On considère le cas où chaque élément  $T$  du maillage  $\tau_h$  sur  $\Omega$  est un sous-domaine. L'idée de base est d'écrire le système  $Su_\Gamma = \mathbf{f}$  du complément de Schur pour les inconnues associées aux points de Fekete qui sont sur le squelette de la décomposition (ici représenté par l'ensemble des arêtes internes du maillage). Ce système est résolu par une méthode de gradient conjugué préconditionné (PCG) et on calcule les inconnues associées aux points de Fekete internes à chaque sous-domaine de façon indépendante d'un domaine à l'autre. Le préconditionneur considéré est le Balancing Neumann-Neumann à deux niveaux (BNN), composé d'une partie fine, qui est le préconditionneur Neumann-Neumann à un niveau, qui élimine la dépendance du nombre de conditionnement par rapport au degré  $N$  de l'approximation polynomiale, auquel s'ajoute une partie grossière qui élimine la dépendance par rapport au nombre d'éléments. En voici les aspects essentiels de la construction.

Soit  $\bar{\Omega} = \cup_{k=1,K} \bar{\Omega}_k$  avec  $\Omega_k \cap \Omega_j = \emptyset$  pour  $k \neq j$ , et le squelette de la décomposition  $\Gamma = \cup_{k=1,K} \partial\bar{\Omega}_k \setminus \partial\Omega$ . On suppose que les sauts à l'intérieur de  $\Omega$  du coefficient  $\alpha$  du problème elliptique considéré (1) soient alignés avec les bords des sous-domaines  $\Omega_k$  et que, pour simplicité, dans chaque sous-domaine  $\Omega_k$  le coefficient  $\alpha$  aye une valeur constante  $\alpha|_{\Omega_k} = \alpha_k > 0$ . On note  $h$  et  $H$  les diamètres maximaux respectivement des triangles du maillage et des sous-domaines de  $\Omega$ . On utilise l'indice  $I$  pour noter le bloc d'inconnues associées aux points de Fekete internes à chaque sous-domaine  $\Omega_k$ , et l'indice  $B$  pour noter le bloc associé aux points de Fekete qui sont sur le squelette  $\Gamma$ . Le système

$A_T \mathbf{u} = \mathbf{b}$  a la forme

$$\begin{pmatrix} A_{II} & A_{IB} \\ A_{BI} & A_{BB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_I \\ \mathbf{b}_B \end{pmatrix}.$$

Si la matrice  $A_{II}$  est inversible, on peut éliminer les variables  $\mathbf{u}_I$  et écrire un nouveau système pour le bloc  $\mathbf{u}_B$ , donné par

$$S \mathbf{u}_B = \mathbf{f}, \quad S = A_{BB} - A_{BI} A_{II}^{-1} A_{IB}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{b}_B - A_{BI} A_{II}^{-1} \mathbf{b}_I.$$

La matrice  $S$  du complément de Schur est de taille plus petite que  $A_T$  et est mieux conditionnée, comme l'atteste la proposition suivante :

**Proposition 2.8** *Le nombre de conditionnement de la matrice  $S$  pour la méthode FEM d'ordre un vérifie*

$$\kappa(S) \leq C \frac{1}{hH}$$

où la constante  $C$  ne dépend pas de  $H, h$ .

Si chaque élément spectral est un sous-domaine, on a  $\kappa(S) \leq \frac{C(N)}{h^2}$ . En tenant compte du fait que les points de Fekete sur les arêtes du maillage sont des points GLL, le comportement de  $C(N)$  est établi dans [84]. Dans cet article, il est montré que, pour un maillage de triangles ou quadrilatères, si les fonctions de base sont des polynômes de Lagrange et les points auxquels elles sont associées sur les arêtes ou les sommets sont de points GLL, alors  $C(N) \approx N$ . Par conséquent, on peut énoncer la proposition suivante:

**Proposition 2.9** *Pour l'approximation du problème (1) par la méthode TSEM, le nombre de conditionnement de la matrice  $S$  vérifie*

$$\kappa(S) \leq C \frac{N}{h^2}$$

où la constante  $C$  ne dépend pas de  $N, h$ .

Il s'avère donc qu'en considérant seulement la matrice  $S$  plutôt que  $A_T$  on a déjà une amélioration importante du nombre de conditionnement vis-à-vis du degré  $N$ . On remarque que si dans la proposition 2.8 on pose  $h = H/N$ , qui est une taille moyenne pour les éléments du micromaillage associé aux points de Fekete (ou de GLL), et qu'ensuite on utilise la notation  $h$  pour le diamètre des éléments spectraux, on retrouve le résultat de la proposition 2.9.

Le préconditionneur BNN à deux niveaux pour la matrice  $S$  est construit par étapes.

(i) Le préconditionneur NN à un niveau est donné par

$$F_{NN} = \sum_{k=1}^K R_k^t D_k S_k^\dagger D_k R_k,$$

où  $S_k$  est la matrice du complément de Schur pour le sous-domaine  $\Omega_k$  et  $S_k^\dagger$  sa pseudo-inverse,  $R_k$  est la matrice (faite de 1 et de 0) de restriction aux points de Fekete sur  $\partial\Omega_k$ ,  $D_i$  est une matrice diagonale dont les éléments sont égaux à  $\delta_k^\dagger(x)$  au point  $x \in \partial\Omega_k$ ,  $\delta_k^\dagger$  étant la fonction inverse de  $\delta_k(x) = (\sum_{j \in \mathcal{N}_x} \alpha_j) / \alpha_k$ ,  $\forall x \in \partial\Omega_k \cap \Gamma$ , avec  $\mathcal{N}_x = \{j : x \in \partial\Omega_k\}$ . Dans le cas de la méthode FEM d'ordre un, on a [116]:

**Proposition 2.10** *Le nombre de conditionnement de la matrice  $F_{NN}S$  pour la méthode FEM d'ordre un vérifie*

$$\kappa(F_{NN}S) \leq \frac{C}{H^2} (1 + \log(\frac{H}{h}))^2$$

où la constante  $C$  ne dépend pas de  $H$  et  $h$ .

Pour la méthode TSEM et avec  $H = h$  on peut s'attendre à avoir la borne suivante comme montré par les résultats numériques obtenus [FR41].

**Conjecture 2.11** *Le nombre de conditionnement de la matrice  $F_{NN}S$  pour la méthode TSEM vérifie*

$$\kappa(F_{NN}S) \leq \frac{C}{h^2} (1 + \log(N))^2$$

où la constante  $C$  ne dépend pas de  $h$  et  $N$ .

Ce résultat est vrai pour la méthode QSEM, comme prouvé dans [92]. La dépendance  $O(h^{-2})$  du nombre de conditionnement est typique en l'absence d'un préconditionneur grossier. C'est pour éliminer cette dépendance qu'on considère un algorithme de type balancing.

(ii) Le préconditionneur BNN à deux niveaux [80] est donné par

$$F_{BNN} = F_0 + (I - F_0S)F_{NN}(I - F_0S)$$

où la partie fine (additive) est donnée par  $F_{NN}$  et la partie grossière (multiplicative) par

$$F_0 = R_0^t S_0^{-1} R_0 \quad \text{avec} \quad S_0 = R_0 S R_0^t.$$

La matrice de restriction  $R_0$  est telle que  $(R_0)_{ij}^{-1}$  donne le nombre d'éléments qui partagent le point  $j$  de l'élément  $i$ . Si l'on considère un vecteur  $\mathbf{v}$  de valeurs aux points sur  $\Gamma$ ,  $R_0 \mathbf{v}$  est un vecteur de taille égale au nombre  $K$  de sous-domaines, et dont la composante  $k$ -ème est la somme pondérée des composantes de  $\mathbf{v}$  associées aux points de  $\Gamma \cap \partial\Omega_k$ . La matrice  $S_0$  de taille  $K$  est, en général, singulière. Pour définir  $S_0^{-1}$  on a plusieurs stratégies: celle qu'on a considérée porte

sur l'élimination d'un sous-domaine et on construit donc une matrice  $S_0$  de taille  $K - 1$ . Le préconditionneur BNN à deux niveaux est souvent appliqué à l'aide d'un algorithme à trois pas, où  $u^{n+1} \leftarrow (u^n, u^{n+1/3}, u^{n+2/3})$  et le terme "balancing" vient du fait que le calcul de  $u^{n+1/3}$  et  $u^{n+2/3}$  équilibre la moyenne de  $u$  sur chaque sous-domaine. La correction sur la grille grossière a par effet d'enlever la partie constante de l'erreur de chaque sous-domaine à chaque itération [107]. Dans le cas de la méthode des éléments finis d'ordre un, on a [116]:

**Proposition 2.12** *Le nombre de conditionnement de la matrice  $F_{BNN}S$  pour la méthode FEM d'ordre un vérifie*

$$\kappa(F_{BNN}S) \leq C(1 + \log(\frac{H}{h}))^2$$

où la constante  $C$  ne dépend pas de  $H, h$ .

Pour la méthode TSEM on peut s'attendre à avoir la borne suivante comme montré par les résultats numériques obtenus [FR41].

**Conjecture 2.13** *Le nombre de conditionnement de la matrice  $F_{BNN}S$  pour la méthode TSEM vérifie*

$$\kappa(F_{BNN}S) \leq C(1 + \log(N))^2$$

où la constante  $C$  ne dépend pas de  $N$  et  $H$ .

### 2.3.3 Méthode $p$ -multigrille pour TSEM

Une autre possibilité de résolution rapide pour le système linéaire  $A_T \mathbf{u} = \mathbf{b}$  est celle d'utiliser une méthode multigrille<sup>5</sup> par rapport au degré d'approximation  $N$  et pas à la taille  $h$  des éléments. Les méthodes itératives classiques sont essentiellement des lisseurs, *i.e.*, elles éliminent assez rapidement les composantes à haute fréquence de l'erreur. Pour les autres composantes, on peut penser à passer sur un maillage plus grossier, sur lequel les basses fréquences deviennent des hautes fréquences et peuvent ainsi être éliminées. L'idée de base du multigrille est donc de combiner différents méthodes/niveaux pour obtenir un algorithme qui soit efficace sur tout le spectre de l'erreur (voir par exemple [121] et les références qui y sont indiquées). Dans l'approche  $p$ -multigrille présentée ici, les différents niveaux sont obtenus en considérant différents degrés d'approximation polynomiale sur un même maillage de  $\bar{\Omega}$ . Les premiers travaux sur le sujet pour la méthode QSEM ont été présentés dans [100, 78, 103] et récemment appliqués en CFD dans [53]. On s'intéresse ici au cas TSEM, pour lequel on a analysé différents type d'opérateurs de restriction/prolongement entre les niveaux, différents lisseurs et différentes constructions

---

<sup>5</sup>En collaboration avec *Victorita Dolean-Maini*, MdC à l'Université de Nice Sophia-Antipolis, FR.

du système aux niveaux autres que le fin. On présente les résultats de cette analyse qui est détaillée dans [FR25, FR45]. Pour l'écriture des algorithmes, on considère deux niveaux d'approximation, en sachant que la même approche marche avec un nombre quelconque de niveaux. Les indices  $c$  et  $f$  sont utilisés pour indiquer le niveau grossier et le niveau fin, qui sont liés, respectivement, à un bas et haut degré d'approximation polynomiale. Pour le niveau grossier,  $N_c$  est le degré d'approximation dans chaque triangle du maillage,  $\{x_i^c\}_{i=1}^{n_c}$  est l'ensemble des points de Fekete et  $\{\varphi_i^c\}_{i=1}^{n_c}$  les polynômes de Lagrange associés. De même, pour le niveau fin, on aura, respectivement,  $N_f$ ,  $\{x_i^f\}_{i=1}^{n_f}$  et  $\{\varphi_i^f\}_{i=1}^{n_f}$ , avec  $N_f > N_c$ .

**Lisseur.** Algorithme de Gauss-Seidel.

Le choix de faire  $2 \times 4$  itérations d'un algorithme de Gauss-Seidel à chaque niveau sauf le plus grossier (où l'on résout exactement le système) est basé sur l'étude théorique et numérique menée dans [FR25].

**Opérateur de prolongement.**  $P$  de type interpolatoire.

L'utilisation du polynôme d'interpolation pour définir l'opérateur de prolongement est assez naturelle dans le cadre des méthodes SEM. On peut écrire

$$u_f(x_i^f) = \sum_{j=1}^{n_c} u_c(x_j^c) \varphi_j^c(x_i^f), \quad 1 \leq i \leq n_f$$

où  $u_c$  (resp.  $u_f$ ) représente  $u_{N_c}$  (resp.  $u_{N_f}$ ). Sous forme matricielle, l'opérateur de prolongement  $P$  s'écrit comme suit:

$$\mathbf{u}_f = P \mathbf{u}_c, \quad [P]_{ij} = \varphi_j^c(x_i^f).$$

On remarque que les valeurs de  $\mathbf{u}_f$  aux points de bord dépendent seulement des valeurs de  $\mathbf{u}_c$  aux points de bord. En effet, on a  $N+1$  points de Fekete sur chaque côté  $a$  de  $\hat{T}$  et les polynômes de Lagrange associés aux autres points (de bord et internes) s'annulent sur  $a$ . L'opérateur  $P$  possède donc une structure particulière: si l'on numérote en premier les points de bord et après les points internes,

$$P = \begin{pmatrix} P_{BB} & 0 \\ P_{IB} & P_{II} \end{pmatrix} \quad (19)$$

où les indices  $B$  et  $I$  sont utilisés pour indiquer ce qui est sur le bord et ce qui est à l'intérieur. L'opérateur  $P$  est donc une matrice de taille  $n_f \times n_c$  où le bloc  $P_{BB}$  a la dimension  $3N_f \times 3N_c$ . Dans un algorithme multigrille, l'opérateur de prolongement s'applique au vecteur  $\mathbf{e}_c$  de l'erreur sur le niveau grossier pour donner la correction au niveau fin  $\mathbf{e}_f = P\mathbf{e}_c$ . Les composantes de  $\mathbf{e}_f$  associées aux points de bord dépendent donc seulement des composantes de  $\mathbf{e}_c$  aux points de bord.

**Opérateur de restriction.**  $R = P^t$ .

Si l'on utilise une méthode variationnelle pour approcher la solution du problème donné (1), on discrétise la forme faible (2) dans laquelle on voit apparaître des produits  $L^2(\hat{T})$ . En tenant compte de ceci, il est assez naturel de définir l'opérateur de restriction comme étant le transposé de l'opérateur de prolongement. En effet, on a :

$$(u_f, \varphi_i^c) = (u_f, \sum_{j=1}^{n_f} \varphi_i^c(x_j^f) \varphi_j^f) = \sum_{j=1}^{n_f} \varphi_i^c(x_j^f) (u_f, \varphi_j^f), \quad [R]_{ij} = \varphi_i^c(x_j^f),$$

et donc  $R = P^t$ . Dans une approche de type multigrille, l'opérateur de restriction est appliqué au résidu  $\mathbf{r}_f$  sur le niveau fin pour donner un vecteur  $\mathbf{b}_c = R\mathbf{r}_f$  sur le niveau grossier. Étant donnée par transposition, la structure de l'opérateur de restriction est telle que les composantes de  $\mathbf{b}_c$  associées aux points internes dépendent des composantes de  $\mathbf{r}_f$  associées aux points internes uniquement.

**Matrice aux niveaux autres que le plus fin.** Obtenue par agrégation de la matrice au niveau le plus fin.

La matrice  $A_c$  du système à un niveau autre que le plus fin peut être construite soit directement, comme pour la matrice  $A_T$  du niveau fin [100], soit par ce qu'on appelle agrégation de  $A_T$ , *i.e.*,  $A_c = RA_T P$ . Cette opération d'agrégation est à faire sur la matrice  $A_T$  avant de prendre en compte les conditions au bord. On remarque que les conditions au bord pour les problèmes associés aux niveaux autres que le plus fin doivent être prises du même type que celles pour le problème initial au niveau fin, mais homogènes.

On remarque aussi que la construction de  $A_c$  par agrégation est cohérente avec la définition par transposition de l'opérateur de restriction. On peut facilement vérifier (voir les détails dans [FR45]) que si  $A_T$  est symétrique définie positive et  $A_c = RAP$ ,  $R = P^t$ , alors  $\mathbf{e}_c$ , tel que  $A_c \mathbf{e}_c = R\mathbf{r}_f$ , est solution du problème suivant: minimiser

$$\phi(\mathbf{u}^*) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*) - (\mathbf{b}, \mathbf{u}^*) \quad (20)$$

$$\text{sous la contrainte } \mathbf{u}^* = \mathbf{u}_f + P\mathbf{e}_c.$$

La méthode  $p$ -multigrille ainsi définie a été testée pour la résolution du système linéaire  $A_T \mathbf{u} = \mathbf{b}$  associé au problème  $-\Delta u + u = f$  dans  $\Omega$  avec différents types de conditions au bord et discrétisé par méthode TSEM sur maillages structurés et non-structurés. Des résultats obtenus, on peut tirer les conclusions suivantes :

1. Pour un maillage donné, le taux de convergence de la méthode  $p$ -multigrille dépend essentiellement du degré d'approximation polynomiale  $N_f$  sur la grille la plus fine.
2. Pour un degré donné d'approximation polynomiale  $N_f$  sur la grille la plus fine, le taux de convergence ne dépend ni du nombre de niveaux (permettant donc de résoudre exactement le système grossier pour  $N_c = 1$ ), ni du type de maillage (structuré ou pas), ni du nombre d'éléments du maillage, ni du type de conditions au bord.

3. Tout en conservant le nombre de degrés de liberté, fixer le nombre d'éléments du maillage et augmenter le degré  $N_f$  est plus cher en temps CPU que l'approche duale pour laquelle on garde  $N_f$  fixé (bas) et l'on augmente le nombre d'éléments du maillage. De plus, le temps CPU pour un  $p$ -multigrille à trois niveaux est légèrement supérieur à celui demandé par un  $p$ -multigrille à deux niveaux.

## 2.4 Conclusions et perspectives

En premier lieu, les résultats numériques pour la méthode  $TSEM$  ont été obtenus à partir de codes en Fortran90 que j'ai développés moi-même. Beaucoup reste à faire au niveau théorique. Les points de Fekete, vu leur distribution non-cartésienne à l'intérieur de  $\hat{T}$ , sont difficiles à manier. Une possibilité reste de tester/trouver d'autres points pour lesquels une esquisse d'analyse soit possible, et c'est bien le sujet sur lequel je me penche ces derniers temps.

Du côté des préconditionneurs, on voudrait étendre aux méthodes  $TSEM$  deux approches parmi les plus récentes (et importantes) méthodes de décomposition de domaine en sous-domaines sans recouvrement, le BDDC (Balancing Domain Decomposition by Constraints, [43, 81, 82]) et le FETI-DP (Dual-Primal Finite Element Tearing and Interconnecting, [50, 75]), déjà étudiées dans [95] pour les méthodes  $QSEM$ .

Pour compléter le cadre, il reste à voir ce qu'on peut faire en trois dimensions d'espaces et l'application de la méthode  $TSEM$  à un problème concret, voir en CFD<sup>6</sup> ou en élastodynamique, domaines d'utilisation par excellence des méthodes SEM.

---

<sup>6</sup>Co-encadrement de la thèse de Mlle Laura Lazar avec Richard Pasquetti (DR CNRS) et Victorita Dolean (MdC Université de Nice Sophia-Antipolis) à partir de septembre 2007 sur la "Méthode d'éléments finis d'ordre élevé pour les équations de Navier-Stokes" (financement : BDO CNRS-Région PACA)



### 3 Quelques applications en l'électromagnétisme des éléments de Whitney

Mon intérêt vers des applications en électromagnétisme a caractérisé ma recherche dès le début de ma carrière. Au sein du CRS4 (Centro di Ricerca, Sviluppo e Studi Superiori en Sardaigne, Italie) je me suis intéressée à des méthodes pour la détermination de la zone de couverture d'une antenne pour la téléphonie cellulaire en régions urbaines (problèmes de diffraction et de propagation d'ondes électromagnétiques à haute fréquence dans des domaines 2D et 3D de taille grande par rapport à la longueur d'onde) [FR3, FR16, FR17, FR18]. J'ai continué, pendant les années de Thèse, avec l'étude et l'utilisation de méthodes issues de la décomposition de domaine (plus précisément, de la méthode des éléments avec joints sans recouvrement couplée avec différentes discrétisations de type éléments finis dans les sous-domaines) pour des problèmes de courants induits dans des moteurs électriques (problèmes électromagnétiques à basse fréquence, voir [FRphd] et les références dans la section 5). Je continue<sup>7</sup> à travailler dans le cadre de problèmes d'électromagnétisme à basse fréquence, dans des directions différentes dont les plus importantes sont décrites dans ce chapitre. Un point commun à ces directions diverses est représenté par l'étude et l'utilisation au niveau discret des éléments finis de Whitney. En particulier, les éléments de Whitney d'arête ou de face sont des éléments finis mixtes, c'est-à-dire des éléments finis à valeurs vectorielles à continuité partielle au passage des interfaces entre éléments (continuité de la partie tangentielle ou de la partie normale). Grâce aux propriétés particulières de ces éléments, la structure géométrique des équations de Maxwell (incluant en particulier la symétrie des équations et les deux dualités en jeu, entre champ électrique et champ magnétique d'une part, et entre circulations des champs électrique et magnétique et flux des inductions correspondantes d'autre part), est préservée pour l'essentiel, suite à la discrétisation. Une tradition bien établie classe les éléments finis selon la nature des degrés de liberté (ddl). C'est ainsi que l'on a des éléments *de Lagrange*, lorsque les ddl sont des valeurs ponctuelles de la fonction à reconstituer, *d'Hermite*, lorsque les ddl peuvent être aussi des valeurs de certaines dérivées de la fonctions à reconstituer, *de Whitney*, dont les ddl sont des intégrales (sur les arêtes, les facettes, etc.) de la forme différentielle à reconstituer.

Dans ce chapitre, nous allons donner un exemple d'application à différents problèmes d'électromagnétisme d'outils de calcul différentiel extérieur, introduit par Cartan [30] puis développé au cours du XX<sup>ème</sup> siècle pour devenir la base de la géométrie différentielle moderne. Le calcul extérieur sur les formes différentielles permet d'exprimer les équations différentielles ou intégrales sur des surfaces courbées régulières de façon consistante tout en mettant en évidence certains invariants géométriques du modèle. Les opérateurs gradient, divergence et rotationnel peuvent ainsi être exprimés de manière très simple en

---

<sup>7</sup>En collaboration avec *Alain Bossavit*, Chercheur à EdF R&D entre 1971 à 2002, et maintenant consultant scientifique au LGEP-CNRS, et *François Dubois*, professeur au CNAM à Paris et Chercheur associé au sein de l'équipe Analyse Numérique et E.D.P. de l'Université Paris Sud à Orsay.

termes de l'opérateur  $d$  de dérivation extérieure qui sera introduit par la suite. De même, les théorèmes de Green, Gauss et Stokes prennent une forme à la fois générale et concise en termes de formes différentielles et de l'opérateur  $d$  agissant sur ces formes. Comparé au calcul tensoriel classique, le calcul extérieur présente plusieurs avantages.

- Il est souvent difficile de reconnaître la nature non-métrique de certaines quantités en notation vectorielle. En revanche, ces propriétés sont facilement identifiables dans une notation en formes différentielles en utilisant les théorèmes de Stokes, de Poincaré ou en appliquant l'opérateur de dérivation extérieure.

- Une grande partie de notre connaissance scientifique repose sur la description de phénomènes physiques au moyen d'équations différentielles. Cependant, le concept même de différentiabilité est en contradiction avec les capacités de l'ordinateur, outil désormais incontournable de la recherche scientifique permettant seulement de manipuler des ensembles finis de nombres. Pour résoudre cette contradiction, un premier groupe de techniques computationnelles visant à satisfaire les équations continues sur un ensemble fini de positions spatiales et temporelles a été proposé (*e.g.* différences finies ou méthodes de particules). Mais pour bien discrétiser des lois de comportement local, on perd souvent de vue les structures globales ainsi que leurs propriétés. Des méthodes plus récentes de calcul de variations, comme la méthode FEM, se trouvent être mieux adaptées à cela car la solution discrète obtenue par ces méthodes vérifie en moyenne des lois locales de conservation et certains invariants (théoriques, comme par exemple la symétrie, ou expérimentaux) du modèle sont conservés. La méthode FEM devient de facto l'outil computationnel des ingénieurs. Les avancées en termes de contrôle de l'erreur, de convergence et de stabilité de ces méthodes de discrétisation n'empêchent pourtant pas toujours que la structure géométrique du système continu modélisé soit détruite (*e.g.*, en électromagnétisme numérique, une cavité vide résonnante peut produire des modes parasites).

- Les outils classiquement utilisés en géométrie différentielle ont très souvent des analogues en théorie combinatoire discrète. Pour cette raison, les versions discrètes des notions de forme et de surface sont formellement identiques aux versions continues (elles devraient donc avoir les mêmes propriétés). De plus, cet approche permet de maintenir très clairement la séparation entre propriétés topologiques (ne dépendant pas de la métrique) et géométriques (dépendant de la métrique) des quantités considérées, en gardant intacte la structure intrinsèque du modèle.

- Une approche numérique basée sur une modélisation différentielle discrète est en général plus facile à définir et à développer que sa version continue. Par exemple, la notion de forme différentielle se traduit au niveau discret par un ensemble de valeurs sur les éléments du maillage. La notion discrète d'orientation est plus directe que son analogue continu. Par exemple, la définition différentielle d'orientation fait intervenir la notion de classe d'équivalence de cartes déterminée par le signe du Jacobien de la transformation. En revanche, l'orientation d'une arête du maillage correspond à une des deux directions de parcours de l'arête, un triangle ou une face est orienté en sens horaire ou anti-horaire, un volume par la direction d'une hélice s'enroulant selon la règle de la

main droite ou de la main gauche. Aucune notion de carte n'est donc présente au niveau discret.

Pour toutes ces raisons, on va développer une approche numérique avec un point de vue géométrique (pour une exposition détaillée de la structure géométrique des modèles en électromagnétisme, voir [21]). La clé pour comprendre cela, est simple : il suffit de reconnaître que des quantités physiques différentes ont des propriétés différentes qu'il faut donc traiter de façon appropriée. En dynamique des fluides ou en électromagnétisme, par exemple, on fait très fréquemment intervenir des intégrales de ligne, de surface, ou de volume. Des évaluations ponctuelles (et par conséquent des approximations nodales) pour ces quantités ne sont pas appropriées. Il faut alors manipuler ces quantités sur des éléments géométriques propres, c'est-à-dire considérer des valeurs aux sommets, aux arêtes, aux faces, etc., comme valeurs approchées respectivement pour des fonctions scalaires, des intégrales de ligne, des intégrales de surfaces, etc., et c'est bien ce qui se passe avec les éléments finis de Whitney.

### 3.1 Notations

On rappelle ici quelques notions de base que nous allons utiliser tout le long de ce chapitre (voir [22] pour plus de détail). Le lecteur familier avec ces notations peut se dispenser de lire cette section.

*Notion d'orientation et de bord d'un simplexe et complexe simplicial.*

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^d$ , où  $d = 3$  est la dimension spatiale, avec une frontière régulière  $\partial\Omega$ . Considérons un pavage  $\mathfrak{m}$  de  $\overline{\Omega}$  par des tétraèdres. Un  $p$ -simplexe,  $0 \leq p \leq d$ , est le terme générique pour décrire l'élément simple (d'où le nom) de dimension  $p$  dans  $\mathfrak{m}$ . Formellement, un  $p$ -simplexe  $s$  est l'enveloppe convexe non-dégénérée de  $(p + 1)$  points géométriquement distincts  $v_0, \dots, v_p \in \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq p$ , c'est-à-dire

$$s = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid x = \sum_{i=0}^p \alpha_i v_i, \text{ avec } \alpha_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=0}^p \alpha_i = 1 \right\}.$$

Les points  $v_0, \dots, v_p$  sont appelés les sommets du  $p$ -simplexe  $s$ . On désigne par  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{T}$  les ensembles formés par les  $p$ -simplexes de  $\mathfrak{m}$  de différentes dimensions  $0 \leq p \leq d$ , c'est-à-dire par les nœuds ( $p = 0$ ), les arêtes ( $p = 1$ ), les faces ( $p = d - 1$ ) et les tétraèdres ( $p = d$ ). Dans une notation plus compacte, l'ensemble des  $p$ -simplexes de  $\mathfrak{m}$  sera noté  $\mathcal{S}^p$  et sa cardinalité par  $|\mathcal{S}^p|$ .

Orienter signifie, en dimension  $d = 1$ , pouvoir distinguer vecteurs positifs ou négatifs, en dimension  $d = 2$ , tourner vers la gauche ou vers la droite, en dimension  $d = 3$ , savoir ce qu'est un trièdre de sens direct (basé sur la règle des trois doigts de la main droite). Fixer une orientation (interne) sur une  $p$ -surface,  $0 \leq p \leq d$ , signifie choisir une classe d'équivalence. Dans le cas des  $p$ -simplexes, l'orientation interne aux simplexes peut être définie de la façon suivante. Un simplexe est une liste de sommets, plus le choix d'une des deux classes d'équivalence obtenues en tenant pour équivalentes deux permutations

de ces sommets qui ont même parité. Ainsi,  $\{\ell, n, k\}$  et  $\{k, \ell, n\}$  désignent la même face, mais  $\{\ell, k, n\}$  est la face d'orientation opposée (et seule l'une des deux est censée faire partie du maillage).

Il existe aussi une notion d'orientation externe, pour la distinguer de la précédente que l'on a qualifié d'interne. Sa définition est simple : un sous-espace est pourvu d'une orientation externe lorsque l'un de ses complémentaires est (intérieurement) orienté. L'orientation externe d'un plan, en dimension  $d = 3$ , est donc l'orientation interne d'une droite qui le traverse, autrement dit "sens de traversée" (à travers) du plan, alors que l'orientation interne consiste à donner un "sens gyrotatoire" dans le plan. Orientations interne et externe d'un même sous-espace ne se déduisent l'une de l'autre que si l'espace ambiant est orienté. En revanche, orientation interne d'un sous-espace et externe de n'importe lequel de ses compléments se correspondent canoniquement, sans aucune référence à l'orientation de l'espace ambiant.

Tout  $(p - 1)$ -simplexe engendré par un sous-ensemble de  $(p - 1)$  sommets parmi  $v_0, \dots, v_p$  est appelé  $(p - 1)$ -face de  $s$ . L'union des  $(p - 1)$ -faces est ce qu'on appelle bord du  $p$ -simplexe  $s$ . L'opérateur de bord  $\partial$  appliqué à un  $p$ -simplexe orienté  $s$  donne la somme de toutes les  $(p - 1)$ -faces de  $s$  avec coefficients 1 (resp.  $-1$ ) selon que l'orientation de la face concorde (resp. ne concorde pas) avec l'orientation induite sur la face par celle de  $s$ . Plus précisément, on peut définir l'opérateur de bord comme suit:

$$\partial(\{v_0, \dots, v_p\}) = \sum_{j=0}^p (-1)^j \{v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_p\},$$

où  $\hat{v}_j$  indique que  $v_j$  n'est pas présent dans la séquence. Par exemple,  $\partial(\{v_0, v_1, v_2\}) = \{v_1, v_2\} - \{v_0, v_2\} + \{v_0, v_1\}$ . Un  $p$ -simplexe a donc  $(p + 1)$  faces. Pour que la définition reste valide pour  $p = 0$  (les nœuds), l'ensemble vide est la  $(-1)$ -face de chaque 0-simplexe.

Un complexe simplicial ou maillage de  $\bar{\Omega}$  est un pavage  $\mathfrak{m}$  composé de simplexes vérifiant les deux conditions suivantes: toute face de simplexes de  $\mathfrak{m}$  est dans  $\mathfrak{m}$  et l'intersection de deux simplexes de  $\mathfrak{m}$  est soit vide soit une face entière commune aux deux simplexes.

*Matrices d'incidence associées à un maillage donné.*

Les ensembles  $\mathcal{S}^p$  sont liés entre eux par des matrices d'incidence [21], notées  $\mathbf{d}$  en général, mais aussi  $\mathbf{G}$  ( $p = 0$ ),  $\mathbf{R}$  ( $p = 1$ ) et  $\mathbf{D}$  ( $p = 2$ ). Ces matrices, très creuses et remplies de 0 et de  $\pm 1$ , sont un outil très puissant, comme on le verra dans la suite de ce chapitre, pour définir les formes de Whitney, pour explorer les propriétés topologiques du domaine  $\Omega$ , etc. Pour les construire, il faut tenir compte d'une notion d'orientation.

Pour donner un exemple, considérons la construction de  $\mathbf{G}$ . Soit  $e = \{\ell, n\}$  une arête du maillage  $\mathfrak{m}$ , orientée de  $\ell$  à  $n$ . On peut définir les nombres d'incidence  $\mathbf{G}_e^n = 1$ ,  $\mathbf{G}_e^\ell = -1$  et  $\mathbf{G}_e^k = 0$  pour tout nœud  $k$  différent de  $\ell$  et de  $n$  (les nœuds ont aussi une orientation,  $\pm 1$ ; implicitement ici ils ont été orientés positivement ; si on considérait l'orientation négative pour le nœud  $n$ , il faudrait alors changer de signe aux éléments de

la colonne  $n$  de  $\mathbf{G}$ ). Ces nombres composent la matrice  $\mathbf{G}$  qui décrit la relation arête-nœud dans le maillage  $\mathbf{m}$ . De même pour la construction des autres matrices  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{D}$ . De façon générale, le symbole  $\mathbf{d}_v^s$  dénote l'élément de la matrice d'incidence  $\mathbf{d}$  (ou  $\mathbf{d}_p$ , quand on a besoin de spécifier la dimension) qui définit la relation entre le  $p$ -simplexe orienté  $s$  et le  $(p+1)$ -simplexe orienté  $v$ . Les matrices d'incidence vérifient la relation  $\mathbf{d}_{p+1}\mathbf{d}_p = \mathbf{0}$ ,  $0 \leq p \leq d-1$  (en trois dimensions, on a  $\mathbf{R}\mathbf{G} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{D}\mathbf{R} = \mathbf{0}$ ).

*p-chaînes et opérateur de bord.*

Nous avons déjà rencontré la notion de chaîne, sans le dire. L'opérateur de bord associe à chaque  $p$ -simplexe la somme de ses  $(p-1)$ -faces avec des coefficients  $\pm 1$ , qui est une  $(p-1)$ -chaîne, comme on va le voir dans un instant.

Une  $p$ -chaîne ordinaire d'un complexe simplicial orienté  $\mathbf{m}$  est une somme formelle pondérée de  $p$ -simplexes orientés  $s$ , appelés composantes de la chaîne, avec les poids  $\alpha_s$  pris dans un certain anneau de coefficients, tel que  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Z}$ . Il est commode de noter une telle chaîne  $c = \sum_{s \in \mathcal{S}^p} \alpha_s s = \alpha_{s_1} s_1 + \dots + \alpha_{s_k} s_k$ , où les signes  $+$  ne signifient pas additionner au sens courant. En revanche, les chaînes elles mêmes peuvent être additionnées, en attribuant à chaque composante la somme des poids qu'elle avait dans chacune des deux chaînes. Si tous les poids  $\alpha_s$  sont nuls, on a la chaîne nulle, notée  $0$ . Les chaînes tordues sont définies de la même façon, à ceci près que leurs composantes ont une orientation externe. Bien évidemment, les chaînes ordinaires et tordues ne se mélangent pas et ne s'additionnent pas. Si  $s$  est un  $p$ -simplexe orienté, la chaîne élémentaire associée à  $s$  est  $\sum_{s \in \mathcal{S}^p} \alpha_s s$  avec  $\alpha_s = 1$  et  $\alpha_{s'} = 0$  pour tout  $s' \neq s$ . Dans la suite, on utilisera parfois le même symbole  $s$  (ou  $n$ ,  $e$ , etc. selon la dimension) pour indiquer le  $p$ -simplexe orienté et la chaîne élémentaire qui lui est associée. On notera  $C_p(\mathbf{m})$  l'ensemble des  $p$ -chaînes définies sur  $\mathbf{m}$ . Une  $p$ -chaîne peut être représentée au niveau numérique par le vecteur de taille  $|\mathcal{S}^p|$  ayant pour éléments les coefficients  $\alpha_s$  de la  $p$ -chaîne.

Considérons maintenant une variété  $M$  orientée, régulière par morceaux, de dimension  $(p+1)$ . Sa frontière  $\partial M$  est un assemblage de  $p$ -variétés, que l'on peut supposer chacune orientée. Assignons à chacune d'elles le poids  $\pm 1$ , selon que l'orientation coïncide ou non avec celle induite par  $M$ . On obtient ainsi une  $p$ -chaîne, que l'on notera  $\partial M$ . Même notation, mais sens nouveau:  $\partial$  est ici un opérateur  $C_{p+1}(\mathbf{m}) \rightarrow C_p(\mathbf{m})$  et par linéarité,  $\partial(\sum_{s \in \mathcal{S}^p} \alpha_s s) = \sum_{s \in \mathcal{S}^p} \alpha_s \partial s$ , où  $\partial s$  est donné par

$$\partial e = \sum_{n \in \mathcal{N}} G_e^n n, \quad \partial f = \sum_{e \in \mathcal{A}} R_f^e e, \quad \partial t = \sum_{f \in \mathcal{F}} D_t^f f,$$

selon la dimension. L'opérateur ainsi obtenu s'appelle bord. La représentation matricielle de l'opérateur  $\partial$  (ou  $\partial_p$  si on a besoin de préciser la dimension  $p$ ) est donnée par  $\mathbf{d}^t$ , la transposée de la matrice d'incidence  $\mathbf{d}$  (de taille  $|\mathcal{S}^{p-1}| \times |\mathcal{S}^p|$  en dimension  $p$ ). La séquence d'espaces de chaînes liés entre eux par l'opérateur  $\partial$  vérifiant la propriété  $\partial \circ \partial = 0$  est un complexe de chaînes, noté  $(C, \partial)$ .

Une  $p$ -chaîne dont le bord est la chaîne nulle s'appelle  $p$ -cycle, et si une  $p$ -chaîne est le bord d'une  $(p+1)$ -chaîne, on dit qu'elle est un bord. Les bords sont des cycles, à cause

de la propriété fondamentale  $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$ . Le contraire, “un cycle est-il un bord ?”, dépend de la variété ambiante. Si l’on note  $\text{Im}(\partial) = B(\mathfrak{m})$  et  $\text{Ker}(\partial) = Z(\mathfrak{m})$ , la propriété  $\partial \circ \partial = 0$  implique que  $B_{p+1}(\mathfrak{m})$  est un sous-groupe de  $Z_p(\mathfrak{m})$ . On peut donc définir le groupe quotient  $H_p(\mathfrak{m}) = Z_p(\mathfrak{m})/B_{p+1}(\mathfrak{m})$  qui est le  $p$ -ème groupe d’homologie de  $\mathfrak{m}$  et la dimension de  $H_p(\mathfrak{m})$  est le nombre de Betti  $b_p$ . La définition de ces groupes s’appuie sur un maillage  $\mathfrak{m}$  mais leurs propriétés dépendent du domaine  $\Omega$  et pas du maillage  $\mathfrak{m}$  défini sur  $\bar{\Omega}$  (ils sont des invariants du domaine).

### *p-cochaînes*

Une  $p$ -cochaîne (sur  $\mathfrak{m}$ ) est le dual d’une  $p$ -chaîne, c’est-à-dire une forme linéaire sur l’espace vectoriel des  $p$ -chaînes à valeurs réelles. On a donc:

$$\begin{aligned} w : C_p &\rightarrow \mathbb{R} \\ c &\rightarrow w(c), \end{aligned}$$

pour dire que la  $p$ -cochaîne  $w$  s’applique sur la  $p$ -chaîne  $c$  pour donner un nombre réel.

À la différence d’une  $p$ -chaîne, une  $p$ -cochaîne est évaluée sur chaque  $p$ -simplexe, en d’autres termes, une  $p$ -cochaîne est assimilable à un champ défini sur les  $p$ -simplexes de  $\mathfrak{m}$ .

Étant donné un vecteur de nombres réels  $\mathbf{b} = \{b_s; s \in \mathcal{S}^p\}$ , on peut aussi définir la  $p$ -cochaîne  $w : c \rightarrow \sum_{s \in \mathcal{S}^p} c_s b_s$  où  $c = \sum_{s \in \mathcal{S}^p} c_s s$  et  $b_s = w(s)$ . La représentation numérique d’une  $p$ -cochaîne résulte de celle des chaînes par dualité. Plus précisément, une  $p$ -chaîne  $c$  est représentée par un vecteur  $\mathbf{c}$  de taille  $|\mathcal{S}^p|$ . Une  $p$ -cochaîne  $w$  est aussi représentée par un vecteur  $\mathbf{w}$  de la même taille que  $\mathbf{c}$ . Une  $p$ -cochaîne  $w$  associe un nombre réel  $w(c)$  à chaque  $p$ -chaîne  $c$ . L’opération linéaire  $w(c)$  se traduit dans un produit scalaire entre deux vecteurs.

### *p-formes différentielles et opérateur de dérivation extérieure.*

Une forme différentielle ordinaire (resp. tordue) de degré  $p$  est une application  $w$  sur l’espace vectoriel des  $p$ -chaînes ordinaires (resp. tordues), à valeurs réelles, linéaire et continue par rapport à la topologie de l’espace des chaînes. La construction de ces topologies est techniquement compliquée, voir [122]. Il s’agit donc d’un élément de  $F^p(\mathfrak{m})$ , le dual topologique de  $C_p(\mathfrak{m})$ . Les espaces  $C_p(\mathfrak{m})$  et  $F^p(\mathfrak{m})$  sont mis en dualité par l’application bilinéaire continue  $\{w, c\} \rightarrow \int_c w$ , de type  $p$ -formes  $\times$   $p$ -chaînes  $\rightarrow$  réel. La notation habituelle pour de tels produits de dualité est  $\langle w, c \rangle$ . Ce produit de dualité est non dégénéré, en ce sens que  $\langle w, c' \rangle = 0$  pour tout  $c'$  implique  $w = 0$  et  $\langle w', c \rangle = 0$  pour tout  $w'$  implique  $c = 0$ . En particulier, si  $c = \sum_{s \in \mathcal{S}^p} \alpha_s s$ , alors par linéarité,  $\langle w, c \rangle = \sum_{s \in \mathcal{S}^p} \alpha_s \langle w, s \rangle$ . Or, c’est précisément d’applications de type  $p$ -formes  $\times$   $p$ -chaînes  $\rightarrow$  réel dont l’électromagnétisme a besoin, comme on va le voir.

Les  $p$ -cochaînes sont les équivalents discrets des  $p$ -formes différentielles. En gros, une  $p$ -forme continue est une application linéaire d’une  $p$ -surface à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , puisque on peut seulement intégrer la  $p$ -forme sur une  $p$ -surface. Au niveau discret, le domaine  $\Omega$  est représenté par le maillage  $\mathfrak{m}$  et la  $p$ -surface devient une  $p$ -chaîne. Une application linéaire qui à une  $p$ -chaîne associe un nombre réel est une  $p$ -cochaîne.

Une forme différentielle  $w$  génère donc une  $p$ -cochaîne  $c \rightarrow \sum_{s \in \mathcal{S}^p} c_s \int_s w$  où  $c = \sum_{s \in \mathcal{S}^p} c_s s$ . Si l'on note par  $\mathbf{b}$  le vecteur de composantes  $b_s = \int_s w$ , la relation  $\mathcal{R} : w \rightarrow \mathbf{b}$  est l'application de de Rham. Les  $p$ -formes de Whitney  $w^s$ , comme on le verra, vont dans l'autre sens, c'est-à-dire à un vecteur  $\mathbf{b}$  est associé la  $p$ -forme  $\sum_{s \in \mathcal{S}^p} b_s w^s$ . L'application  $\mathcal{P} : \mathbf{b} \rightarrow \sum_{s \in \mathcal{S}^p} b_s w^s$  est l'application de Whitney. On anticipe que pour les  $p$ -formes de Whitney d'ordre polynomial un,  $\mathcal{R}\mathcal{P} = Id$  ; pour le cas des ordres élevés, cette propriété n'est plus vraie [FR53]. Si l'on introduit une métrique dans l'espace affine ambiant, les formes différentielles sont en correspondance avec les champs de scalaires et de vecteurs. Les coefficients des  $p$ -cochaînes deviennent les ddl de ces champs.

Pour  $p > 0$ , la dérivée extérieure de la  $(p-1)$ -forme  $w$  est la  $p$ -forme  $dw$ . En trois dimensions, l'opérateur  $d$  est la version affine de l'opérateur différentiel classique gradient, rotationnel, divergence, selon la valeur de  $p$ , qui eux dépendent de la structure euclidienne. En notation matricielle, l'opérateur  $d$  est représenté par une matrice  $\mathbf{d}$  de taille  $|\mathcal{S}^{p+1}| \times |\mathcal{S}^p|$ . Les matrices d'incidence  $\mathbf{G}, \mathbf{R}, \mathbf{D}$  sont la représentation matricielle de l'opérateur  $d$  appliqué à des 0-, 1- et 2-formes respectivement. Le théorème de Stokes s'écrit  $\int_c dw = \int_{\partial c} w$  ou de façon équivalente  $\langle dw, c \rangle = \langle w, \partial c \rangle$ , pour tout  $c \in C_p(\mathbf{m})$  et  $w \in F^{p-1}(\mathbf{m})$ . L'opérateur  $d$  est donc le dual de l'opérateur  $\partial$ . De plus, on a  $d \circ d = 0$ . Quand les espaces linéaires considérés sont des espaces de formes différentielles  $F^p(\mathbf{m})$  et l'opérateur est la dérivée extérieure  $d$ , le complexe de chaînes  $(F, d)$  est appelé le complexe de de Rham.

Une forme  $w$  est dite fermée si  $dw = 0$  ( $w$  est un cocycle) et exacte s'il existe une forme  $v$  telle que  $w = dv$  ( $w$  est un cobord). À nouveau, tout cobord est un cocycle, mais un cocycle peut ne pas être un cobord dans des domaines à topologie non triviale: c'est l'aspect dual de "tout cycle n'est pas un bord" vu plus haut. Le lemme de Poincaré atteste que toute forme fermée sur une surface régulière contractile<sup>8</sup> est localement exacte. Au niveau discret, ce lemme atteste que pour toute  $p$ -cochaîne  $w$  fermée ( $dw = 0$ ) sur un maillage étoilé, il existe une  $(p-1)$ -chaîne  $\alpha$  telle que  $w = d\alpha$ . Étudier les formes différentielles est donc une autre approche, duale par rapport à l'homologie, des questions de topologie globale, qu'on appelle cohomologie. Les groupes de cohomologie dans le complexe de de Rham sont les espaces quotients  $\text{Ker } d / \text{Imag } d$ . Les groupes d'homologie et de cohomologie ne sont pas simplement deux notions duales, mais ils sont isomorphes, de même dimension donnée par les nombres de Betti. Une manière classique de construire une base de ces groupes repose sur l'utilisation de la forme normale de Smith, comme détaillé dans la section 3.3.

#### *Arbre et coarbre*

Un ensemble  $\tau_p$  de  $p$ -simplexes du maillage  $\mathbf{m}$  sur  $\bar{\Omega}$  tel que  $C_p(\tau)$  ne contient pas de cycles sauf le 0 est appelé arbre de dimension  $p$ . Un  $p$ -arbre  $\tau_p$  est dit couvrant ("spanning tree" en anglais) si tout  $p$ -arbre  $\tau'_p \not\equiv \tau_p$  vérifie  $\tau'_p \subset \tau_p$ . L'ensemble des  $p$ -simplexes du maillage  $\mathbf{m}$  qui ne sont pas dans le  $p$ -arbre constitue le  $p$ -coarbre. Supposons pour un moment que  $\Omega$  soit contractile et on note  $\tau_1$  l'arbre couvrant d'arêtes. Les arêtes d'un maillage  $\mathbf{m}$

<sup>8</sup>Réductible à un point par déformation continue.

sur  $\bar{\Omega}$  sont réparties entre un arbre couvrant et son complément, le coarbre. Les arêtes de l'arbre sont utilisées pour générer une base de l'espace de dimension finie composée de gradients de fonctions scalaires sur  $\Omega$ . Les coarêtes sont utilisées pour construire une base de l'espace des rotationnels.

Si  $\Omega$  n'a pas une topologie triviale, il peut exister des champs à divergence nulle qui ne sont pas des rotationnels et les arêtes de  $\mathcal{A} \setminus \tau_1$  ne sont pas suffisantes pour tout prendre en compte. Il faut donc enrichir l'arbre en ajoutant une coarête pour chaque cycle de  $C_1(\mathbf{m})$  qui n'est pas le bord d'une surface contenue dans  $\Omega$ , c'est-à-dire pour chaque générateur du groupe d'homologie  $H_1(\mathbf{m})$  (les générateurs de  $H_1(\mathbf{m})$  sont en nombre égal au nombre de Betti  $b_1 = \dim H_1(\mathbf{m})$ ). L'arbre enrichi est connu sous le nom d'arbre augmenté ("belted tree" en anglais). Grâce à cette coarête que l'on a ajoutée, tout circuit formé de coarêtes est le bord d'une surface dans  $\Omega$  (voir une application dans [FR32, FR46]). L'arbre augmenté n'est plus un arbre au sens strict du mot, mais on l'appelle toujours arbre.

### 3.2 $p$ -formes de Whitney d'ordre un sur les simplexes

Avant de procéder dans le détail, j'aimerais rappeler la manière par laquelle on est arrivé à ce type d'éléments finis, en reprenant une partie de la Préface de [21].

Dans les années 70 on avait bien compris comment discrétiser par éléments finis classiques (nodaux) l'équation de Poisson (*e.g.* en électrostatique, un potentiel scalaire électrique  $\phi$ , lié au champ électrique  $\mathbf{e}$  par la relation  $\mathbf{e} = -\nabla\phi$ , vérifie  $-\nabla \cdot (\epsilon \nabla\phi) = q$  où  $\epsilon \geq \epsilon_0 > 0$  est la permittivité électrique et  $q$  la charge électrique prescrite). P. P. Silvester était parmi les ardents promoteurs de l'utilisation de cette discrétisation pour la résolution de problèmes en électromagnétisme. Le succès a été très important pour des modélisations en dimension deux mais le passage à la dimension trois s'est avéré très difficile. En effet, l'équation de Poisson n'est pas le seul "modèle" d'équation en électromagnétisme. Il y en a un autre, qui est  $\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{v}) = \mathbf{j}$  : en magnétostatique,  $\mathbf{v}$  représente un potentiel vecteur magnétique lié à l'induction magnétique  $\mathbf{b}$  par la relation  $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{v}$ , où  $\nu \geq \nu_0 > 0$  est la réluctivité magnétique (on rappelle que  $\nu = \frac{1}{\mu}$ ) et  $\mathbf{j}$  est la densité de courant qui génère  $\mathbf{b}$ . Si on se place en dimension deux, dans une formulation transverse magnétique (TM, le champ magnétique est dans la section d'étude), le potentiel vecteur  $\mathbf{v}$  est  $(0, 0, v)$  (et de même pour  $\mathbf{j} = (0, 0, j)$ ) et l'équation  $\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{v}) = \mathbf{j}$  devient  $-\nabla \cdot (\nu \nabla v) = j$ . On a donc l'illusion de pouvoir traiter avec un unique modèle tous les problèmes. Mais en dimension trois, les opérateurs div-grad et rot-rot sont profondément différents et demandent donc un traitement différent. Ceci n'était pas évident dans les années 70. En dimension trois, on a  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \Delta \mathbf{v}$ , il semblait donc possible de transférer en dimension trois des techniques propres à la dimension deux en imposant juste une "condition de jauge" du type  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  pour avoir  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\Delta \mathbf{v} = \mathbf{j}$  et travailler *séparément* sur les trois composantes (scalaires) de  $\mathbf{v}$ . Il a fallu des années avant de se rendre compte de l'erreur.

Au début des années 80, A. Bossavit et J. C. Vérité [23] adoptent une approche

différente inspirée par les méthodes de réseaux (voir par exemple [117]) pour traiter le terme rot-rot dans l'équation des courants induits  $\partial_t(\mu\mathbf{h}) + \nabla \times (\frac{1}{\sigma}\nabla \times \mathbf{h}) = 0$ , où  $\sigma$  est la conductivité électrique. Dans ces méthodes il était usuel de prendre comme inconnues de base les forces électromotrices le long des branches d'un circuit et appliquer des lois de Kirchhoff pour poser les équations. Dans le cas du problème des courants induits formulé en termes de champ magnétique  $\mathbf{h}$ , les forces magnétomotrices, *i.e.*, les circulations du champ magnétique le long des arêtes du maillage, doivent être les inconnues du problème. Puisque Bossavit et Vérité travaillaient avec la formulation variationnelle du problème pour une approche par éléments finis, la question qui se posait était comment reconstituer le champ  $\mathbf{h}$  à partir des forces magnétomotrices d'arête. Plus précisément, en connaissant la circulation de  $\mathbf{h}$  le long des arêtes des tétraèdres d'un maillage du domaine, comment s'exprime  $\mathbf{h}$  à l'intérieur des tétraèdres ? J.C. Nédélec répond à la question d'une façon originale en donnant la formule suivante [87] :  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\beta}$ , où  $\mathbf{x}$  est la position et  $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$  sont deux vecteurs qui dépendent du tétraèdre contenant  $\mathbf{x}$ . Il y a ainsi six degrés de liberté par tétraèdre, en correspondance linéaire inversible avec les six circulations sur les arêtes. Toutefois, l'expression analytique de ces fonctions de base est restée un mystère pour un bon moment (pourquoi  $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\beta}$  ?). Une remarque de Kotiuga [77] aida plus tard à y reconnaître une forme différentielle, et à comprendre la vraie nature de ces interpolants [20]. Cette remarque porte sur la connexion avec un sujet peu connu de la géométrie différentielle classique, les formes de Whitney [122]. Ceci a été le début d'un grand travail de reformulation qui a abouti aux éléments finis de Whitney tels qu'on les connaît aujourd'hui [21, 87].

Dans la suite de cette section, je me permets de décrire rapidement cette connexion. Pour faire cela, on passe par trois étapes sur un exemple donné, le champ électrique. Les trois étapes sont : (1) le champ électrique comme 1-forme, (2) la 1-forme de Whitney sur un tétraèdre, (3) la représentation vectorielle de la 1-forme de Whitney sur un tétraèdre par un champ de vecteurs du type  $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\beta}$ .

*Première étape.* Un champ est une fonction, définie sur tout ou partie de l'espace, qui associe à chaque point la valeur d'une grandeur physique en ce point. Le concept du champ est très utile pour modéliser les perturbations des propriétés de l'espace dues à la présence d'une source. Le champ électromagnétique est invisible, sa présence dans un domaine  $\Omega$  est détectée parce que, par exemple, une charge électrique  $q$  posée dans  $\Omega$  se déplace sous l'action de la force du champ. Or, considérons une charge électrique  $q$  que l'on fait bouger le long d'une courbe orientée  $c$  (orientation définie par le champ de vecteurs tangents  $\tau$ ). Il s'agit d'une charge de détection avec  $q$  assez petit pour ne rien changer au champ électromagnétique  $\{E, B\}$  ambiant, et d'un déplacement virtuel qui nous permet de considérer le champ comme figé à sa valeur à l'instant  $t$ . Un certain travail (virtuel) est mis en jeu dans ce déplacement, égal à  $q$  fois une quantité que l'on appelle force électromotrice (f.é.m.) le long de  $c$  au temps  $t$ . Aucune unité de longueur ni élément de la structure euclidienne, ne sont impliqués dans cette description. Pourquoi trouve-t-on alors de tels éléments dans l'expression mathématique de cette f.é.m., à savoir

la circulation  $\int_c E \cdot \tau$  du champ électrique ? Parce que le champ  $E$  n'est pas l'observable physique, le véritable objet d'intérêt est sa circulation. Le champ de vecteurs dont les circulations sont les f.é.m., c'est-à-dire celui qui code les données physiques, dépend de la métrique, alors que les données elles-mêmes n'en dépendent pas. Ce champ, comme on l'a dit tout au début, ne fait donc que représenter l'objet mathématique pertinent, qui est l'application  $c \rightarrow \langle \text{f.é.m. le long de } c \rangle$ , c'est-à-dire une 1-forme différentielle, que nous allons noter  $e$ . Cette 1-forme (ordinaire) est le bon objet mathématique avec lequel représenter le champ électrique, car il contient toute l'information à son sujet, sans aucun élément de structure superflu. On peut donc se passer complètement de  $E$  et introduire  $e$  directement, en disant : le champ électrique (physique) est totalement décrit (quant à ses effets observables) par l'application de type 1-chaîne  $\rightarrow$  réel que nous appelons f.é.m., dont l'expérience montre qu'elle est linéaire continue. Mais cela n'est autre que la définition d'une 1-forme. Cette forme  $e$  est ainsi la description mathématique la plus économique du phénomène champ électrique. La dualité chaîne-forme prend ainsi un sens très concret : les 1-chaînes modélisent les détecteurs grâce auxquels on mesure le champ. La 1-forme représente le champ lui-même et le produit de dualité est le résultat de la mesure.

*Deuxième étape.* Nous avons défini la 1-forme  $e$  comme une application de type courbe orientée  $(\gamma) \rightarrow$  réel (f.é.m. =  $\int_\gamma e$ ). On s'intéresse maintenant aux 1-formes de base (les 1-formes de Whitney) qui permettent de décrire  $e$  dans une approche par éléments finis. Soit donc  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^d$  contenant  $\gamma$ , discrétisé à l'aide d'un maillage tétraédrique  $\mathfrak{m}$ , dont les arêtes sont notées par l'indice  $a$ . Soit  $w^a$  la 1-forme de Whitney de degré polynomial un, que l'on va définir dans un moment, associée à l'arête  $a$ . Alors, dans une approche par éléments finis (d'arêtes),  $e$  est représenté par  $\sum_{a \in \mathcal{A}} e_a w^a$ . L'application  $e \rightarrow \sum_{a \in \mathcal{A}} e_a w^a$  est la composée de celle de de Rham,  $e \rightarrow \mathbf{e} = (e_a)_{a \in \mathcal{A}}$  et de celle de Whitney,  $\mathbf{e} \rightarrow \sum_{a \in \mathcal{A}} e_a w^a$ . On remplace maintenant la courbe  $\gamma$  par une 1-chaîne  $\mathcal{P}^t \gamma = \sum_{a \in \mathcal{A}} w^a(\gamma) a$ . L'opérateur  $\mathcal{P}^t$  associe à une  $p$ -variété sa représentation "finie" qui est une  $p$ -chaîne simpliciale. Alors,  $\langle \mathbf{e}, \mathcal{P}^t \gamma \rangle = \langle \mathcal{P} \mathbf{e}, \gamma \rangle$ , ce qui justifie la notation  $\mathcal{P}^t$ . Si on interprète les quantités scalaires  $e_a$  comme des circulations élémentaires  $\int_a e$ , on a une approximation naturelle de  $\int_\gamma e$  en remplaçant  $\gamma$  par  $\mathcal{P}^t \gamma$ . On dispose donc d'une connaissance (approchée) du champ  $e$  à partir du vecteur  $\mathbf{e} = (e_a)_{a \in \mathcal{A}}$ .

Par cette transposition, on est passé de la façon traditionnelle de voir les problèmes d'interpolation ("comment représenter au mieux un champ comme somme finie pondérée de champs de base ?") à celle "duale" : "quelle 1-chaîne approche le mieux la courbe orientée  $\gamma$  ?". La réponse à cette deuxième question fournit, par dualité, une définition des formes de Whitney grâce à une nouvelle interprétation [24]. Prenons  $w^a$  par exemple :  $w^a$  est comme  $e$  une application du type courbe orientée  $(\gamma) \rightarrow$  réels ( $w^a(\gamma) = \int_\gamma w^a$ ). Avec cette convention, on a

$$\langle \mathbf{e}, \mathcal{P}^t \gamma \rangle = \sum_{a \in \mathcal{A}} w^a(\gamma) e_a = \left\langle \sum_{a \in \mathcal{A}} w^a e_a, \gamma \right\rangle = \langle \mathcal{P} \mathbf{e}, \gamma \rangle.$$

Alors,  $w^a$  est la 1-forme de Whitney de degré polynomial un associée à l'arête  $a$  et la

composante de  $\gamma$  dans la 1-chaîne  $\mathcal{P}^t\gamma$  est  $\int_\gamma w^a = \langle w^a, \gamma \rangle$ . Les formes de Whitney ont un double rôle : d'un côté elles construisent une forme à partir d'un vecteur de scalaires (c'est l'opérateur  $\mathcal{P}$ ), de l'autre côté elles approchent une  $p$ -variété par une  $p$ -chaîne (c'est l'opérateur  $\mathcal{P}^t$ ).

Pour arriver à la formulation des formes différentielles de Whitney, il s'agit de représenter une  $p$ -variété par une  $p$ -chaîne. C'est effectivement l'approche définie dans [22, 24] qu'on a adoptée dans [FR40, FR43, FR53]. Lorsque  $p = 0$ , la solution de ce problème est connue. Tout point  $x$  du domaine maillé  $\bar{\Omega}$  est le barycentre  $x = \sum_{n \in \mathcal{N}} \lambda_n(x) x_n$  des sommets du simplexe auquel il appartient. Les quantités  $\lambda_n(x)$  sont les poids barycentriques du point  $x$  par rapport au nœud  $n$ , lorsque  $x$  appartient à l'un des tétraèdres qui ont  $n$  comme sommet (dans les autres cas,  $\lambda_n(x) = 0$ ). Le point  $x$  est donc représenté par la 0-chaîne  $\mathcal{P}^t x = \sum_{n \in \mathcal{N}} \lambda_n(x) n$ . Les 0-formes de Whitney sont donc les  $\lambda_n$ , les fonctions chapeau de la méthode FEM. Par transposition, on a donc  $\langle \mathbf{v}, \mathcal{P}^t x \rangle = \sum_{n \in \mathcal{N}} \lambda_n(x) v_n = \sum_{n \in \mathcal{N}} w^n(x) v_n = \langle \sum_{n \in \mathcal{N}} w^n v_n, x \rangle = \langle \mathcal{P} \mathbf{v}, x \rangle$ . Autrement dit, les fonctions chapeau sont les poids qui permettent de représenter les points à partir des positions des nœuds mais ce sont aussi les interpolants qui donnent les fonctions scalaires à partir de leurs valeurs nodales.

Pour  $p = 1$ , soit  $xy$  le segment orienté de  $x$  à  $y$ . On sait que  $\mathcal{P}^t x = \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle w^n, x \rangle n$  et, par linéarité, on peut écrire  $\mathcal{P}^t xy = \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle w^n, y \rangle \mathcal{P}^t xn$ . Par quelle 1-chaîne représenter  $\mathcal{P}^t xn$  ? Une seule réponse est possible :  $\mathcal{P}^t xn$  est la moyenne des trois arêtes  $\{n, k\}$ ,  $\{n, \ell\}$ ,  $\{n, m\}$  du tétraèdre contenant  $x$  qui ont une extrémité en  $n$  avec pour poids les poids barycentriques de  $x$  par rapport aux autres extrémités de ces arêtes. Tenant compte des orientations des arêtes et pour une position quelconque de  $x$ , on pose  $\mathcal{P}^t xn = \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{G}_a^n \lambda_{a-n}(x) a$ , où la notation  $a - n = \ell$  si par exemple  $a = \{n, \ell\}$ . Alors  $\mathcal{P}^t xy = \sum_{n \in \mathcal{N}, a \in \mathcal{A}} \mathbf{G}_a^n \lambda_{a-n}(x) \langle w^n, y \rangle a$  que l'on veut égal à  $\sum_{a \in \mathcal{A}} \langle w^a, xy \rangle a$ , d'où

$$\langle w^a, xy \rangle = \sum_{n \in \mathcal{N}} \mathbf{G}_a^n \lambda_{a-n}(x) \langle w^n, y \rangle.$$

On a également,  $0 = \langle w^a, xx \rangle = \sum_{n \in \mathcal{N}} \mathbf{G}_a^n \lambda_{a-n}(x) \langle w^n, x \rangle$ , d'où

$$\begin{aligned} \langle w^a, xy \rangle &= \sum_{n \in \mathcal{N}} \mathbf{G}_a^n \lambda_{a-n}(x) \langle w^n, y - x \rangle \\ &= \sum_{n \in \mathcal{N}} \mathbf{G}_a^n \lambda_{a-n}(x) \langle w^n, \partial(xy) \rangle = \sum_{n \in \mathcal{N}} \mathbf{G}_a^n \lambda_{a-n}(x) \langle dw^n, xy \rangle \end{aligned}$$

(puisque  $d$  est l'opérateur dual de  $\partial$ ) pour chaque segment  $xy$  contenu entièrement dans l'ensemble des tétraèdres qui entourent  $a$ . Par conséquent,  $w^a = \sum_{n \in \mathcal{N}} \mathbf{G}_a^n \lambda_{a-n} dw^n$ . De façon générale, nous sommes conduits à la définition récursive suivante (définition 1.7 dans [22])

**Définition 3.1** *La  $p$ -forme différentielle de Whitney  $w^\sigma$  de degré polynomial un associée au  $p$ -simplexe  $\sigma$  est*

$$w^\sigma = \sum_{s \in \mathcal{S}^{p-1}} \mathbf{d}_\sigma^s \lambda_{\sigma-s} dw^s, \quad 1 \leq p \leq d, \quad (21)$$

avec  $w^n = \lambda_n$  pour  $p = 0$ . L'espace engendré par les  $p$ -formes de Whitney de degré polynomial 1 sur le maillage  $\mathfrak{m}$  est  $W^p = \text{span}\{w^s, s \in \mathcal{S}_p\}$ .

Si on désigne par  $\mathbf{W}^p$ , ( $p = 0,1,2,3$ ), les espaces  $\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^A, \mathbb{R}^F, \mathbb{R}^T$  isomorphes aux produits cartésiens  $\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^A, \mathbb{R}^F, \mathbb{R}^V$ , nous pouvons décrire la structure des espaces d'éléments de Whitney par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} W^0 & \xrightarrow{\text{grad}} & W^1 & \xrightarrow{\text{rot}} & W^2 & \xrightarrow{\text{div}} & W^3 \\ | & & | & & | & & | \\ \mathbf{W}^0 & \xrightarrow{\mathbf{G}} & \mathbf{W}^1 & \xrightarrow{\mathbf{R}} & \mathbf{W}^2 & \xrightarrow{\mathbf{D}} & \mathbf{W}^3 \end{array} \quad (22)$$

où les lignes verticales représentent des isomorphismes. La propriété d'exactitude des suites en haut ou en bas dans (22) dépend de la topologie du domaine d'étude  $\Omega$ . Si l'union de tous les tétraèdres de la triangulation de  $\Omega$  est contractile, alors on peut montrer que

$$W^1 \cap \text{Ker}(\text{rot}) = \text{grad}(W^0), \quad W^2 \cap \text{Ker}(\text{div}) = \text{rot}(W^1). \quad (23)$$

Si une des propriétés dans (23) n'est pas valable, on peut en déduire des informations sur la topologie de  $\Omega$ . En gros, l'existence de champs à rotationnels nuls mais qui ne sont pas des gradients indique la présence d'un ou plusieurs "circuits" dans  $\Omega$  (comme pour le tore). L'existence de champs à divergence nulle mais qui ne sont pas des rotationnels signale la présence d'un "trou" dans  $\Omega$  (comme le domaine inclus entre deux sphères de même centre). Les suites précédentes constituent donc des objets algébriques parmi lesquels on peut explorer la topologie du domaine d'étude (et sur lesquels Whitney a travaillé dans [122]).

*Troisième étape.* Pour l'arête  $a = \{m, n\}$ , la formule  $w^a = \sum_{n \in \mathcal{N}} \mathbf{G}_a^n \lambda_{a-n} dw^n$  donne  $w^a = \lambda_m dw^n - \lambda_n dw^m$ . Si l'on remplace l'opérateur  $d$  par  $\nabla$ , on a le champ de vecteurs représentatif de  $w^a$ , c'est-à-dire  $w^a = \lambda_m \nabla w^n - \lambda_n \nabla w^m$  (pour le cas des formes de face et de volume, le passage de la formule récursive (21) aux champs représentatifs demande quelques propriétés en plus, voir [FR43]). Pour terminer, montrons que dans un tétraèdre  $t = \{m, n, k, \ell\}$  le champ de vecteurs  $w^{\{m, n\}}$  prend la forme  $\alpha \times x + \beta$ , où  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^d$  et  $\alpha$  est parallèle à l'arête  $\{k, \ell\}$  opposée à  $\{m, n\}$ . En notant  $|t|$  le volume du tétraèdre  $t$  et par  $(\ell - k)$  le vecteur d'extrémités  $k$  et  $\ell$  dans cet ordre, on peut écrire  $w^{\{m, n\}} = [(\ell - k) \times (x - k)]/6|t|$  car le produit mixte  $(\ell - k) \times (x - k) \cdot (m - n) = 6|t|$  pour un point  $x$  appartenant à l'arête  $\{m, n\}$  et  $\langle w^{\{m, n\}}, \{m, n\} \rangle = 1$ . Ceci nous donne  $w^{\{m, n\}} = [(\ell - k) \times [(x - o) - (k - o)]]/6|t| = \frac{(\ell - k)}{6|t|} \times x + \beta$  qui est l'expression  $\alpha \times x + \beta$  vue plus haut, où  $\alpha = \frac{(\ell - k)}{6|t|}$  est un vecteur parallèle à  $\{k, \ell\}$  (ici on a noté  $o$  l'origine du système cartésien). C'est sous cette forme, proposée dans [87], que l'élément fini d'arête est entré dans la littérature de l'électrotechnique [23].

### 3.3 Calcul automatique de groupes d'homologie

Une description précise de géométries de type industriel est basée sur l'utilisation d'outils de conception assistée par ordinateur (CAO). Différentes parties de la géométrie sont souvent maillées séparément et au moment du recollement, des erreurs accidentelles (humaines, d'arrondi, de programmation, etc.) peuvent être commises et se concrétiser dans la présence de cycles et/ou trous dans le maillage. *Question 1 : Comment détecter ces défauts du maillage de façon automatique ?*

La décomposition de Hodge d'un vecteur  $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^d$  est la représentation de ce vecteur comme somme de trois composantes orthogonales  $\mathbf{u} = \text{grad}\phi + \text{rot}v + \theta$ , où la définition de  $\theta$  dépend de la topologie du domaine  $\Omega$ . *Question 2 : Comment construire une base pour la composante  $\theta$  ?*

La topologie algébrique et l'algèbre linéaire peuvent donner une réponse à ces deux questions, comme on l'a détaillé dans [FR46, FR32], ainsi qu'à d'autres.

Soit  $\mathcal{C} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un opérateur linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension  $m$  et  $n$  respectivement. Étant donnée une base dans chaque espace, l'opérateur  $\mathcal{C}$  est représenté par une matrice  $\mathbf{C}$  de taille  $n \times m$ . On peut choisir des bases dans les deux espaces  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  telles que la matrice  $\mathbf{C}$  ait la forme

$$\begin{pmatrix} \text{diag}(s_1, \dots, s_k) & 0_{k, m-k} \\ 0_{n-k, k} & 0_{n-k, m-k} \end{pmatrix} \quad (24)$$

qui est connue comme *forme normale de Smith* [106, 47]. Cette forme normale exhibe clairement le rang  $k$ , le noyau (engendré par les  $m - k$  derniers vecteurs de base de  $\mathcal{X}$ ) et l'image (engendrée par les  $k$  premiers vecteurs de base de  $\mathcal{Y}$ ) de l'opérateur  $\mathcal{C}$ .

Dans [FR46, FR32], nous avons proposé un algorithme pour calculer la forme normale de Smith associée à une matrice donnée de nombres entiers  $(+1, -1, 0)$  de taille  $n \times m$ , qui travaille en  $O(s^2)$  où  $s = \max(m, n)$ . Cette forme normale est construite à l'aide de transformations unimodulaires, c'est-à-dire de transformations représentées par des matrices de nombres entiers à déterminant  $\pm 1$ , dont les matrices inverses sont encore à nombres entiers. Ces transformations sont le résultat d'un enchaînement fini d'opérations élémentaires (permutation de deux lignes, multiplication d'une ligne par  $-1$ , substitution d'une ligne par une combinaison à poids entiers d'autres lignes). Une opération élémentaire sur les lignes correspond à un changement de base de  $\mathcal{Y}$  et une opération élémentaire sur les colonnes correspond à un changement de base de  $\mathcal{X}$ . Ces opérations élémentaires sont mémorisées dans deux matrices unimodulaires,  $\mathbf{Q}$  de taille  $n$  pour les colonnes et  $\mathbf{P}$  de taille  $m$  pour les lignes. Ces deux matrices  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{P}$  sont telles que à la sortie de l'algorithme, la matrice  $\mathbf{QCP}$  soit sous la forme normale de Smith (24). Et donc, le noyau de  $\mathcal{C}$  est engendré par les  $m - k$  derniers vecteurs lignes de  $\mathbf{P}$  alors que l'image de  $\mathcal{C}$  est engendré par les  $k$  premiers vecteurs colonnes de  $\mathbf{Q}$ . La forme normale de Smith permet de répondre aux deux questions posées.

*Réponse 1.* Une première réponse rapide à la Question 1 est donnée par la caractéristique d'Euler-Poincaré associée au domaine  $\Omega$ , *i.e.*, l'entier  $\chi(\Omega) = \sum_{i=0}^d (-1)^i b_i$ , où  $b_i$

est le  $i$ ème nombre de Betti de  $\Omega$  défini par  $b_i = \dim(\text{Ker}(\partial, C_p(\mathbf{m}))/\partial C_{p+1}(\mathbf{m}))$  (ou de façon équivalente par  $b_i = \dim(\text{Ker}(d, F^p(\mathbf{m}))/dF^{p-1}(\mathbf{m}))$ ). Dans [108], on montre que ces nombres sont des invariants topologiques, en ce sens qu'ils dépendent du domaine  $\Omega$ , à un homéomorphisme près, mais pas du maillage  $\mathbf{m}$ . D'après la définition des  $b_i$ , on a la formule d'Euler-Poincaré  $\chi(\Omega) = N - A + F - T = 1 - r(\Omega)$  où  $N, A, F, T$  sont les nombres de nœuds, arêtes, etc., définis plus haut et  $r(\Omega)$  est le nombre de trous de  $\Omega$ . La constante  $\chi$  vaut typiquement de 0 à 2 (lorsque la région maillée est bornée et contractile,  $\chi = 1$ ). Pour la frontière  $\Gamma$  du domaine  $\Omega$ , la constante  $\chi(\Gamma) = N_\Gamma - A_\Gamma + F_\Gamma = 2(1 - r(\Gamma))$  où  $r(\Gamma)$  est le nombre de trous de  $\Gamma$ . En connaissant la constante  $\chi$  pour le domaine maillé, on peut voir si le maillage généré vérifie la formule.

Une autre réponse est donnée par l'algorithme défini auparavant. En effet, un générateur de  $H_1(\mathbf{m}) = \text{Ker}(\partial, C^1(\mathbf{m}))/\partial C^2(\mathbf{m})$  est un 1-cycle  $c$  qui n'est pas le bord d'une 2-chaîne. En termes matriciels, il s'agit d'un vecteur du noyau de  $\mathbf{G}^t$  qui n'est pas dans l'image de  $\mathbf{R}^t$ , qui est donc calculable par la méthode présentée dans [FR46, FR32].

*Réponse 2.* On s'intéresse à la solution approchée du problème de la magnétostatique linéaire dans un domaine  $\Omega$  à topologie non triviale, par exemple un tore, de frontière régulière connexe  $\Gamma$ . Le problème considéré est le suivant : Trouver le champ d'induction magnétique  $b$  tel que

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nu b) &= j, & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot b &= 0, & \text{dans } \Omega, \\ b \cdot n_\Gamma &= g, & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega, \end{aligned} \tag{25}$$

où  $\nu$  est la réductivité magnétique ( $\nu = \frac{1}{\mu}$ , où  $\mu \geq \mu_0 > 0$  est la perméabilité magnétique) définie sur  $\Omega$ ,  $j$  est une densité de courant source donnée et  $g$  une fonction scalaire définie sur la frontière  $\Gamma$ . Un premier point difficile est la prise en compte de la condition  $\nabla \cdot b = 0$ . Dans la littérature, on trouve différentes approches, dont la construction d'une base pour ces éléments qui tient compte explicitement de cette condition [67], la technique des formulations variationnelles augmentées mixtes [36], l'introduction d'un potentiel vecteur [6] magnétique  $v$  tel que  $b = \nabla \times v$  (voir [FR26] pour une application), etc. Si on utilise le potentiel vecteur, il se pose le problème de son unicité, c'est-à-dire que le vecteur  $v$  est défini modulo le gradient d'une fonction scalaire ( $v' = v + \nabla\phi$ ,  $\nabla \times v = \nabla \times v' = b$ ). Dans l'ensemble des potentiels vecteurs  $v$ , la relation  $\nabla \times v = \nabla \times v'$  est une relation d'équivalence dont les classes sont en correspondance biunivoque avec les champs  $b$ . La "classe" d'équivalence représente "un" seul objet qui est le champ induction magnétique  $b$ . L'approche classique revient à choisir un représentant parmi les éléments de la classe: la condition sur laquelle on base le choix d'un représentant dans la classe s'appelle "condition de jauge". Une condition possible est la jauge de Coulomb ( $\nabla \cdot v = 0$ ), généralement imposée par la technique de pénalisation ou par l'intermédiaire d'un multiplicateur de Lagrange [39]. Une autre condition très utilisée est la jauge  $p \cdot z = 0$  où  $z$  est un champ de vecteurs dont les lignes de champ ne sont pas fermées et sont telles qu'elles peuvent relier toute paire de points quelconque du domaine d'étude [6]. En particulier, si  $v$  et  $v'$  sont tels que  $\nabla \times v = \nabla \times v'$ , alors

$\nabla \times \delta v = 0$  où  $\delta v = v - v'$ . S'ils vérifient la condition  $v \cdot z = 0$ , alors  $\delta v \cdot z = 0$  et  $0 = \int_{\gamma} \delta v \cdot \boldsymbol{\tau} = \int_{\gamma} \nabla f \cdot \boldsymbol{\tau} = f(x) - f(y)$ ,  $\forall x, y \in \Omega$ , où  $\gamma$  est une courbe orientée qui lie  $x$  à  $y$  et de vecteur tangent  $\boldsymbol{\tau} \parallel z$ . Il en résulte que la fonction  $f$  est constante et donc que  $\delta v = \nabla f = 0$ , c'est-à-dire que  $v \equiv v'$ . Dans le cas d'une approximation par éléments d'arêtes, cette technique est bien adaptée. Comme le champ de vecteurs  $z$  peut être déterminé par un arbre constitué d'une suite d'arêtes dans le maillage, cette jauge est parfois appelée la jauge d'arbre. Théoriquement, le choix de l'arbre est arbitraire. Pourtant, les expériences numériques montrent que la précision du calcul ainsi que la vitesse de convergence du système à résoudre dépendent du choix de l'arbre [96].

Dans [FR32], c'est la formulation en potentiel vecteur qu'on a considérée avec une jauge d'arbre et nous avons étudié à quoi elle peut correspondre au niveau discret dans le cas où  $\Omega$  n'est pas simplement connexe (voir [46] pour le cas où  $\Omega$  est connexe mais à frontière pas simplement connexe). Plus précisément, on cherche une base  $\{v_1, \dots, v_A\} \in W^1$  pour l'espace  $\mathbf{RW}^1$  et une façon de sélectionner un unique  $v \in W^1$  tel que  $b = \nabla \times v$  pour un champ  $b \in W^2$  solénoïdal. Dans la littérature il existe plusieurs techniques de construction d'arbres. Dans [FR46, FR32] nous abordons le sujet d'un point de vue algébrique (voir aussi [111]). Prenons  $c \in C^1(\mathfrak{m})$  : l'écriture  $\partial c = 0$  signifie que le vecteur  $\mathbf{G}^t \mathbf{c} = \mathbf{0}$ , de taille  $N$ , combinaison linéaire des lignes de la matrice  $\mathbf{G}^t$ , est nul. L'extraction d'un arbre couvrant est donc équivalente à trouver un ensemble de cardinal maximal de lignes libres de  $\mathbf{G}$ , ce qui revient à chercher une sous-matrice de rang maximal dans  $\mathbf{G}$ . Les autres lignes, correspondant aux coarêtes, sont combinaison linéaire des lignes libres et forment une base de  $\text{Ker} \mathbf{G}^t$ . Les coarêtes donnent donc une base pour les 1-cycles dans le sens que, pour une coarête  $\alpha$  fixée, il existe une façon unique d'associer un entier  $c_a$  à chaque arête  $a$  de l'arbre  $\tau_1$  pour avoir une 1-chaîne fermée ( $\partial(\alpha + \sum_{a \in \tau_1} c_a a) = 0$ ).

### 3.4 Opérateurs de restriction/prolongement pour les éléments de Whitney

La résolution efficace et performante des systèmes algébriques dérivant de la discrétisation d'un problème donné à l'aide d'une méthode choisie est une étape délicate. Les matrices associées à des discrétisations par éléments finis (de Whitney) sont généralement creuses et de grande taille, et leur inversion se fait de préférence par des méthodes itératives ou multiniveaux. Dans le chapitre 2, on a vu un exemple de méthodes multiniveaux où les différents niveaux étaient associés à des degrés d'interpolation différents sur un même maillage du domaine  $\bar{\Omega}$  ( $p$ -multigrille). On s'intéresse maintenant à des méthodes multiniveaux classiques où les différents niveaux sont associés à différents maillages de  $\bar{\Omega}$  ( $h$ -multigrille), le degré d'interpolation par éléments finis de Whitney étant fixé à un sur chacun de ces maillages (voir [17, 68, 101] pour des résultats dans le cadre des approximations par éléments d'arête sur maillages simpliciaux et [37] pour une formulation de ces méthodes dans le cas d'un maillage en hexaèdres).

Considérons donc *deux maillages emboîtés* sur  $\bar{\Omega}$ , pour simplifier la présentation,

notés  $\mathfrak{m}_h$  le fin et  $\mathfrak{m}_H$  le grossier, respectivement. Soient  $\mathcal{V}_h$  et  $\mathcal{V}_H$  les espaces vectoriels de dimension finie composés de vecteurs de ddl (vecteurs dont les composantes sont des cochaînes), avec  $\dim(\mathcal{V}_h) > \dim(\mathcal{V}_H)$  en accord avec le choix  $H > h$ . Dans une approche multiniveaux, les espaces  $\mathcal{V}_h$  et  $\mathcal{V}_H$  communiquent entre eux (les vecteurs des résidus et des erreurs) par l'intermédiaire de deux opérateurs  $\mathcal{R}_h^H : \mathcal{V}_h \rightarrow \mathcal{V}_H$  de restriction et  $\mathcal{P}_H^h : \mathcal{V}_H \rightarrow \mathcal{V}_h$  de prolongement. Il s'agit de deux opérateurs, entre vecteurs de cochaînes, linéaires et de rang maximal. Dans [FR38] on montre comment l'opérateur  $\mathcal{P}_H^h$  entre cochaînes est le dual de l'opérateurs de chaînes,  $\pi : (\partial, C(\mathfrak{m}_h)) \rightarrow (\partial, C(\mathfrak{m}_H))$ , où  $(\partial, C(\mathfrak{m}_h))$  (resp.  $(\partial, C(\mathfrak{m}_H))$ ) est le complexe de chaînes défini sur  $\mathfrak{m}_h$  (resp.  $\mathfrak{m}_H$ ). L'opérateur  $\mathcal{R}_h^H$  est défini comme étant le transposé de  $\mathcal{P}_H^h$ . On introduit aussi l'opérateur  $\rho$  qui est l'injection naturelle de  $\mathfrak{m}_H$  dans  $\mathfrak{m}_h$ , défini comme suit.

**Définition 3.2** *Soit  $S$  un  $p$ -simplexe du maillage grossier  $\mathfrak{m}_H$ , alors on pose*

$$\rho(S) = \sum_{s \subset \mathfrak{S}_{\mathfrak{m}_h}^p} \rho_s^s s \quad \text{avec} \quad \rho_s^s = \begin{cases} 0 & \text{si } s \not\subset S, \\ +1 & \text{si } s \subset S \text{ et même orientation,} \\ -1 & \text{si } s \subset S \text{ et différente orientation.} \end{cases} \quad (26)$$

Dans le cas particulier où  $p = 0$ , si l'on définit une orientation positive pour les nœuds,  $\rho_s^s$  vaut 0 si  $S \not\equiv s$  et 1 si  $S \equiv s$ , pour  $S \in \mathfrak{m}_H$  and  $s \in \mathfrak{m}_h$ .

L'opérateur  $\pi$  traduit en termes mathématiques l'opération de représentation d'un petit  $p$ -simplexe  $s$  par une chaîne de grands  $p$ -simplexes  $S$ . À ce propos, notons  $w^S$  la  $p$ -forme de Whitney associée au  $p$ -simplexe  $S$  de  $\mathfrak{m}_H$  telle que  $\langle w^S, S' \rangle = \delta_{SS'}$  pour tout  $p$ -simplexe  $S' \in \mathfrak{m}_H$ .

**Définition 3.3** *Soit  $s$  un  $p$ -simplexe du maillage fin  $\mathfrak{m}_h$ , alors on pose*

$$\pi(s) = \sum_{S \subset \mathfrak{S}_{\mathfrak{m}_H}^p} \langle w^S, s \rangle S \equiv \sum_{S \subset \mathfrak{S}_{\mathfrak{m}_H}^p} \pi_s^S S. \quad (27)$$

L'utilisation de formes de Whitney pour la définition de  $\pi$  est naturelle : on a en effet vu auparavant que les formes de Whitney sont un outil de représentation de  $p$ -surfaces par des  $p$ -chaînes simpliciales. Dans ce cas, la  $p$ -surface est le petit  $p$ -simplexe  $s$ .

L'application de chaînes  $\pi$  permet de définir naturellement par dualité un opérateur de prolongement  $\mathcal{P}_H^h$  comme suit :  $\langle \mathbf{u}, \pi(s) \rangle = \langle \mathcal{P}_H^h \mathbf{u}, s \rangle$  pour toute  $p$ -chaîne  $s \in C^p(\mathfrak{m}_h)$  et vecteurs de  $p$ -cochaînes  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_H$ , comme suggéré par le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_h & & C(\mathfrak{m}_h) \\ \mathcal{P}_H^h \uparrow & \langle \cdot, \cdot \rangle & \downarrow \pi \\ \mathcal{V}_H & & C(\mathfrak{m}_H). \end{array}$$

En choisissant des bases duales sur les espaces vectoriels  $\mathcal{V}_h$  et  $\mathcal{V}_H$ , les éléments de la représentation matricielle de l'opérateur  $\mathcal{P}_H^h$  sont les réels  $(\mathcal{P}_H^h)_S^s = \pi_s^S$ . On rappelle que  $S$

et  $s$  sont deux simplexes de même dimension  $p$  dans les maillages  $\mathfrak{m}_H$  et  $\mathfrak{m}_h$  respectivement. On a donc un opérateur de prolongement distinct pour chaque valeur de  $p$ . L'opérateur de restriction, comme on l'a vu dans la section 2.3.3, est choisi comme étant le transposé de l'opérateur de prolongement. Ce choix est lié aux propriétés de la matrice  $A_h$  au niveau fin et à la définition de la matrice  $A_H$  au niveau grossier par agrégation de la matrice  $A_h$ .

Les poids (ou moments)  $\langle w^S, s \rangle$  ne dépendent pas de la géométrie (métrique) de  $S$  et  $s$  mais de leurs position et orientation relatives. Ce sont des quantités indépendantes de toute métrique. Cet aspect affine est lié au fait de considérer les formes de Whitney (ici de degré polynomial égal à un) comme un outil pour décrire une  $p$ -surface de  $\Omega$  par des sommes pondérées de  $p$ -chaînes d'un maillage de  $\bar{\Omega}$ . Cette idée conduit à des stratégies simples et équivalentes de calcul de poids de  $p$ -formes sur un simplexe de même dimension  $p$ , qui sont analysées dans [FR48]. Pour deux maillages emboîtés, c'est-à-dire que le fin  $\mathfrak{m}_h$  est obtenu par raffinement prescrit du grossier  $\mathfrak{m}_H$  (voir [FR38] pour plus de détails), les coefficients  $\pi_s^S$  sont calculables "à la main". Dans le cas général (maillages non emboîtés), ces coefficients sont calculables de façon non métrique [FR48] à partir seulement de la connaissance des coordonnées barycentriques.

### 3.5 $p$ -formes de Whitney de degré supérieur à un

Les éléments de Whitney sur  $p$ -simplexes [21, 87] sont parmi les éléments finis les plus utilisés en électromagnétisme numérique. Ils permettent de représenter les formes différentielles sur un maillage simplicial à partir d'un ensemble de ddl qui sont des cochaînes. Ils sont donc bien adaptés pour la discrétisation des équations de Maxwell. Dans les modèles développés, les éléments finis de Whitney utilisés sont de degré polynomial égal à un. La précision du calcul peut être insuffisante [86, 110] dans certains cas comme, par exemple, les problèmes couplés magnéto-mécaniques où les champs peuvent varier fortement, les problèmes de cavités résonnantes qui nécessitent un calcul précis des valeurs propres du système [4], etc. Il existe deux méthodes pour améliorer la précision : la première consiste à effectuer un raffinement local du maillage ( $h$ -méthode), la seconde à utiliser des éléments d'ordre supérieur ( $p$ -méthode). Le raffinement local du maillage impose bien souvent l'apparition d'éléments déformés indésirables car de tels éléments détériorent la stabilité du système et la précision de calcul. À ce propos, dans [FR38] on a étudié une technique de raffinement de maillage uniforme, c'est-à-dire une technique qui génère au cours de la procédure un nombre fini de types de cellules. Avec des éléments d'ordre supérieur, on peut obtenir une bonne précision avec en général un petit nombre d'éléments. Afin d'optimiser le nombre d'inconnues, il y a également intérêt à combiner des éléments d'ordres différents pour la résolution d'un problème donné ( $hp$ -méthode).

Des nombreux papiers ont été dédiés à la construction d'éléments finis de Whitney (d'arête ou de face) d'ordre polynomial supérieur à un, en s'appuyant sur la théorie publiée au début des années 80 [87, 85]. Les éléments d'ordre élevé sont appréciés pour leur haute précision mais leur développement a été freiné par la difficulté de générer

les fonctions de base correspondantes et par le manque d'une notation cohérente. La définition proposée par J.-C. Nédélec est optimale dans le sens où, à précision fixée, il utilise un nombre minimal de ddl, mais difficile à suivre car les fonctions de base n'ont pas été explicitement fournies. Par conséquent, il existe dans la littérature de nombreuses approches pour la construction de formes de Whitney d'ordre supérieur à un (voir [110] et les références qui y sont contenues). En regardant par exemple la forme des fonctions de base proposées dans [61, 63, 120, 69, 70, 8, 5], il est difficile de savoir si les espaces engendrés sont les mêmes. En outre, les constructions existantes (hiérarchiques ou non) d'éléments finis de Whitney suivent la démarche traditionnelle qui consiste à utiliser des "moments" d'ordre de plus en plus élevé. Plus précisément, des éléments finis de Whitney d'ordre élevé associés à des  $p$ -simplexes en dimension  $d$  font intervenir des ddl associés à des  $q$ -simplexes, avec  $p < q \leq d$ , dont l'interprétation physique reste obscure.

Dans [FR40, FR43, FR53], nous présentons une définition d'éléments finis de Whitney de degré polynomial  $k + 1$  (pour un entier  $k > 0$ ) basée sur l'utilisation de "petits simplexes", *i.e.*, simplexes obtenus par des contractions affines (associées au treillis principal d'ordre  $k$ ) d'un simplexe du maillage. Cette approche peut être interprétée comme une formule de reconstruction de haute précision basée sur la représentation d'un simplexe maître par un nombre finis de sous-simplexes (qui ne constituent pas un maillage du simplexe maître). Les sous-simplexes n'existent pas dans la réalité, c'est une astuce mathématique qui nous permet de définir très simplement une base pour les éléments finis de Whitney de degré polynomial  $k + 1$ . Dans chaque tétraèdre du maillage de  $\bar{\Omega}$ , les fonctions de base pour les  $p$ -formes de Whitney de degré  $k + 1$  sont obtenues comme produit des fonctions de base pour les  $p$ -formes de Whitney de degré un usuelles (Définition 3.1) par un monôme homogène de degré  $k$  dans les fonctions barycentriques du tétraèdre. Dans le cas d'éléments finis d'arête ou de face, cette approche est cohérente avec la technique classique pour générer une base complète à l'ordre  $k$  pour ce type d'éléments (voir les détails dans [63]). Dans [FR40, FR43, FR53] nous justifions d'un point de vue géométrique et dans le langage des formes différentielles, la construction de fonctions de base à partir de produits de monômes de coordonnées barycentriques et de  $p$ -formes de Whitney d'ordre 1. Les points de base de cette construction sont : (1) les  $p$ -formes de Whitney de degré supérieur doivent, elles aussi, former des partitions de l'unité, (2) étant a priori plus nombreuses que celles de degré un les formes de degré supérieur doivent correspondre à une discrétisation plus fine dans chaque tétraèdre, et c'est bien les "petits simplexes" dont on a parlé plus haut, (3) les espaces  $W_{k+1}^p$  engendrés par les  $p$ -formes de Whitney de degré  $k + 1$  doivent, eux aussi, constituer une suite exacte (voir la preuve dans [FR53]).

Voici les points principaux de cette construction. Nous adoptons une notation par multi-indices : soit  $\mathbf{k}$ , en gras, un vecteur  $(k_0, \dots, k_d)$  de  $d + 1$  entiers  $k_i \geq 0$ , et on note par  $k$  son poids  $\sum_{i=0}^d k_i$ . L'ensemble des multi-indices  $\mathbf{k}$  à  $d + 1$  composantes et de poids  $k$  est noté par  $\mathcal{I}(d + 1, k)$  et sa cardinalité  $\#\mathcal{I}(d + 1, k)$  est le coefficient binomial  $\binom{k+d}{d} = (k+d)!/d!k!$ . Nous adoptons aussi la notation suivante : pour

$\mathbf{k} \in \mathcal{I}(d+1, k)$ , l'expression  $\lambda^{\mathbf{k}}$  denote le monôme homogène  $\prod_{i=0}^d (\lambda_i)^{k_i}$ .

Dans chaque tétraèdre  $v$ , les “petits simplexes” sont l'image de  $v$  par la transformation géométrique suivante :

**Définition 3.4** À chaque multi-indice  $\mathbf{k} \in \mathcal{I}(d+1, k)$  correspond une application  $\tilde{\mathbf{k}}$  de  $v$  en lui même. Soit  $\tilde{k}_i$  la fonction affine qui transforme l'intervalle  $[0, 1]$  en l'intervalle  $[\frac{k_i}{k+1}, \frac{1+k_i}{k+1}]$ . Si  $\lambda_i(x)$ ,  $0 \leq i \leq d$ , sont les coordonnées barycentriques d'un point  $x \in v$ , son image  $\tilde{\mathbf{k}}(x)$  a des coordonnées barycentriques  $\tilde{k}_i(\lambda_i(x))$ , avec  $\tilde{k}_i(\lambda_i(x)) = (\lambda_i(x) + k_i)/(k+1)$ .

Géométriquement, cette application est une homothétie, *i.e.* une transformation de l'espace qui réduit la distance entre deux points d'un facteur  $k+1$  par rapport à un point fixe  $o$  de coordonnées barycentriques  $k_i/k$ . Noter que les images  $\tilde{\mathbf{k}}(v)$  de  $v$  ne constituent pas un maillage dans  $v$ , il y a en effet des trous pas nécessairement homothétiques à  $v$ . Noter aussi que  $\tilde{\mathbf{k}}(x_i)$ , pour tout multi-indice  $\mathbf{k} \in \mathcal{I}(d+1, k)$  et tout nœud  $i$  de  $v$ , forment  $T_{k+1}$ , le treillis principal d'ordre  $k+1$  dans  $v$ .

**Définition 3.5** On appelle “petits  $p$ -simplexes” de  $v$ ,  $0 \leq p \leq d$ , les images  $\tilde{\mathbf{k}}(S)$  pour tout (“grand”)  $p$ -simplexe  $S \in \mathcal{S}^p(v)$  et tout multi-indice  $\mathbf{k} \in \mathcal{I}(d+1, k)$ , et on les note  $s = \{\mathbf{k}, S\}$ .

Tout  $p$ -simplexe de  $\tilde{\mathbf{k}}(v)$ , pour  $\mathbf{k} \in \mathcal{I}(d+1, k)$ , est un petit  $p$ -simplexe.

Les  $p$ -formes de Whitney de degré polynomial supérieur dans  $v$  sont associées à la transformation géométrique définie dans  $v$  par l'application  $\tilde{\mathbf{k}}$  pour tout choix de multi-indice  $\mathbf{k} \in \mathcal{I}(d+1, k)$ .

**Définition 3.6** Les  $p$ -formes de Whitney de degré polynomial  $k+1$  sur  $\mathbf{m}$  sont les formes  $w^s = \lambda^{\mathbf{k}} w^S$ , où  $s = \{\mathbf{k}, S\}$ , pour tout multi-indice  $\mathbf{k} \in \mathcal{I}(d+1, k)$  et pour tout (grand)  $p$ -simplexe  $S \in \mathcal{S}^p$ , et  $w^S$  est la  $p$ -forme de Whitney de degré 1 associée à  $S$  (Définition 3.1). L'espace engendré par les  $p$ -formes de Whitney de degré polynomial  $k+1$  sur le maillage  $\mathbf{m}$  est  $W_{k+1}^p = \text{span}\{w^s, s = \{\mathbf{k}, S\}, \mathbf{k} \in \mathcal{I}(d+1, k), S \in \mathcal{S}^p\}$ .

D'où l'algorithme suivant : pour  $W_2^p$ , associer à chaque  $p$ -simplexe  $S \in \mathcal{S}_p$  le produit  $\lambda_n w^S$ , où  $n$  parcourt  $\mathcal{N}$  et  $w^S \in W_1^p$ , pour  $W_3^p$ , associer à chaque  $p$ -simplexe  $S \in \mathcal{S}_p$  le produit  $\lambda_n \lambda_m w^S$ , où  $n, m$  parcourent  $\mathcal{N}$  et  $w^S \in W_1^p$ , etc. Noter, toutefois, que ces nouvelles formes ne sont pas linéairement indépendantes et une procédure de sélection est nécessaire pour extraire un ensemble de formes libres. En outre, les matrices associées à une discrétisation d'un problème par ces formes ne sont pas bien conditionnées (voir [FR43]) par rapport à celles associées par exemple aux formes proposées dans [5]. Mais, la “convergence de type  $hk$ ” (spectrale en  $k$  et algébrique en  $h$ ) de l'erreur d'approximation associée à ces éléments est prouvée numériquement pour un problème modèle en magnétodynamique après discrétisation en temps [FR43] et également pour le problème de calcul des valeurs propres de Maxwell dans une cavité vide à parois métalliques, et non excitée par des sources extérieures [FR54].

### 3.6 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons présenté trois applications de  $p$ -formes de Whitney sur simplexe et les outils de topologie algébrique correspondants. Nombreuses sont les directions de recherche ouvertes par ces premiers travaux.

En ce qui concerne le calcul automatique de groupes d'homologie d'un domaine  $\Omega$ , il faudrait valider l'algorithme proposé sur des cas tests plus compliqués. On voudrait utiliser les mêmes outils pour étudier le cas du problème de la magnétostatique posé dans un domaine tridimensionnel  $\Omega$  non simplement connexe et à frontière non connexe.

L'analyse détaillée de la convergence et des performances de l'algorithme multi-niveaux basé sur l'opérateur  $\pi$  n'a pas été considérée jusqu'à maintenant.

Pour le cas des  $p$ -formes de Whitney de degré supérieur, on aimerait voir si la même construction fonctionne pour les hexaèdres, domaines qui sont plus simples à traiter du point de vue géométrique (génération de maillage, raffinement de maillage, etc.). Une fois établie la définition pour les  $p$ -formes de Whitney de degré supérieur sur un hexaèdre, des questions intéressantes se posent. Par exemple, en deux dimensions, un carré est divisible en triangles (2 en traçant une diagonale, ou 8 en traçant les deux diagonales et les deux médianes). On peut donc composer deux applications de chaîne : celle de Whitney vers le complexe simplicial et celle du complexe simplicial au complexe-briques. Par transposition, on obtient un nouveau système de formes de Whitney sur le complexe-briques, différent du complexe isoparamétrique. Ces nouvelles formes sont associées aux mêmes cellules. Les deux complexes de Whitney ont mêmes dimensions, mêmes cohomologie, etc., quels sont leurs rapports et propriétés d'approximation ? Il y a une deuxième question analogue, mais dans l'autre sens. Par exemple, en deux dimensions, un triangle est divisible en quadrilatères (3 en joignant le centre de gravité du triangle aux milieux des côtés). Composant les formes de Whitney du complexe-briques avec l'application du complexe-briques vers le simplicial, on obtient un nouveau complexe de Whitney associé au complexe simplicial et différent de l'habituel, quels sont leurs rapports et propriétés d'approximations ?

Une autre tâche intéressante serait de comprendre si les différentes fonctions de base pour les  $p$ -formes de Whitney d'ordre supérieur contenues dans les articles cités en référence à ce sujet, engendrent le même espace. La définition de bases hiérarchiques (concept très utile pour les  $p$ -raffinements) pour les formes de Whitney est une autre question ouverte et pas du tout claire.

Dans ce chapitre, on a introduit des notions de géométrie différentielle discrète et expliqué comment ces notions peuvent être très utiles pour définir une approche de discrétisation simple mais fiable. Nous avons aussi montré comment construire une version discrète de la décomposition de Hodge dans des domaines à topologie non triviale. Cette approche géométrique au calcul numérique est assez récente, et beaucoup de détails restent encore à explorer. L'application d'une telle approche en élasticité ou dynamique des fluides, serait intéressante à étudier.

## 4 La méthode d'éléments finis avec joints

La méthode des éléments avec joints MEM (“mortar element method” en anglais), introduite en 1987 dans [13, 14], est une technique non-conforme de décomposition de domaine reposant sur une partition du domaine de calcul en sous-domaines sans recouvrement et permet d'utiliser des discrétisations complètement indépendantes sur chaque sous-domaine, grâce à des conditions de raccord appropriées sur les interfaces. Elle permet de combiner ces discrétisations de façon optimale, c'est-à-dire, l'erreur globale est bornée par la somme des erreurs d'approximation locales dans les sous-domaines. Depuis son apparition, la méthode des éléments avec joints a eu un très grand succès. Il est difficile de recenser les nombreuses publications qui font appel à cette méthode ; on peut s'en faire une petite idée en regardant, par exemple, [10, 125, FR35] et les références qui y sont citées. Un des grands avantages de la méthode par rapport à d'autres techniques de décomposition de domaine est la possibilité de traiter différents types de non-conformité avec beaucoup de flexibilité.

*Non-conformité fonctionnelle.* La méthode MEM s'appuie sur des techniques de type variationnel pour la discrétisation de EDPs, comme par exemple la méthode ( $p$ - ou  $h$ - ou  $hp$ -)FEM, ( $Q$  ou  $T$ )SEM, etc. Le problème discret est construit à l'aide de la méthode de Galerkin appliquée à la formulation variationnelle du problème donné. Or, même si les espaces discrets locaux aux sous-domaines sont contenus dans les espaces variationnels continus locaux, l'espace global discret n'est plus contenu dans l'espace fonctionnel global, du fait de la présence de conditions de raccordement aux interfaces entre les sous-domaines qui sont trop faibles pour assurer la conformité.

*Non-conformité géométrique.* La partition du domaine  $\Omega$  en sous-domaines est dite géométriquement conforme, si deux sous-domaines voisins se partagent un sommet ou une arête ou face entières. Dans le cas contraire, la partition est dite géométriquement non-conforme. La possibilité de traiter, par méthode MEM, des décompositions non-conformes présente des avantages importants, comme par exemple, raffinements locaux des maillages de calcul, parties du domaine qui sont mobiles par rapport à d'autres mais avec “interfaces de glissement”, *i.e.*, interfaces invariantes par rapport au mouvement, génération “par parties indépendantes” du maillage dans les géométries complexes, couplage de méthodes sur maillages différents, etc.. Cet aspect non-conforme a été largement étudié et utilisé pendant mon travail de thèse [FRphd], pour étudier la distribution des courants induits dans un moteur électrique.

*Non-conformité de recouvrement.* La partition du domaine est choisie avec recouvrement et, une fois encore, différentes discrétisations sont possibles dans les sous-domaines. La condition de raccordement va transférer l'information d'un sous-domaine à l'autre au niveau d'une interface qui est contenue dans les sous-domaines, qui peut même être dans le maillage de ces sous-domaines. Cette version de la méthode (les premiers travaux à ma connaissance sont [2, 26]) est préférable en présence de parties du domaine qui sont mobiles par rapport à d'autres mais sans interfaces de glissement (c'est le cas,

par exemple, d'un ballon lancé dans l'air). J'ai abordé ce cas<sup>9</sup> (voir [FR47, FR23, FR33, FR34, FR50]) après mon travail de thèse. Notons que les travaux qu'on a mené sur ce sujet ont été à la base de [54, 55]. D'autres techniques "multi-échelles" sont, par exemple, la méthode de domaines fictifs, la méthode chimère et la méthode de "patches" d'éléments finis. Les méthodes de domaines fictifs, sous la forme introduite par R. Glowinski, ne sont pas des décompositions de domaine puisqu'elles étendent le problème à un domaine plus grand de forme simple, mais elles partagent avec les décompositions de domaine le fait qu'elles se formulent aussi avec un multiplicateur de Lagrange. Ce multiplicateur peut être localisé sur la frontière, comme dans [15, 56] ou réparti dans un volume, comme dans [57, 59]. La méthode chimère [25] vise à résoudre des PDE dans un domaine décomposé en sous-domaines avec recouvrement par corrections successives comme dans un algorithme de Schwarz. La méthode de "patches" d'éléments finis [60, 99] est une approche de décomposition de domaine avec recouvrement, qui fait apparaître plusieurs niveaux de grilles non nécessairement emboîtées pour résoudre numériquement des problèmes elliptiques à données multi-échelles. La méthode consiste à calculer des corrections successives de la solution par sous-domaines discrétisés de façon non nécessairement conforme.

Pour simplifier la présentation, on commence avec un problème modèle elliptique avec conditions au bord homogènes de type Dirichlet, donné par

$$-\nabla \cdot (\alpha \nabla u) = f \text{ dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (28)$$

où  $\alpha$  est une matrice définie positive, symétrique et coercive sur le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , de frontière  $\partial\Omega$  et  $f$  une fonction donnée dans  $L^2(\Omega)$ . Le problème (28) a la formulation variationnelle suivante:

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } a_\Omega(u, v) = (f, v)_\Omega \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega), \quad (29)$$

où la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)_\Omega$  et la forme linéaire  $(f, \cdot)_\Omega$  sont définies par

$$a_\Omega(u, v) := \int_\Omega \alpha \nabla u \cdot \nabla v, \quad (f, v)_\Omega := \int_\Omega f v \quad (30)$$

et  $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}$ . Grâce au lemme de Lax-Milgram, le problème (29) a une solution unique.

#### 4.1 Le cas d'une décomposition de $\Omega$ sans recouvrement entre les sous-domaines

Dans cette section, je présente les travaux successifs à la thèse sur la méthode MEM. Ma recherche s'est orientée suivant deux directions: (i) comment discrétiser de façon

---

<sup>9</sup>En collaboration avec *Yvon Maday*, professeur au laboratoire J.-L. Lions de l'Université Pierre et Marie Curie, France, *Barbara Wohlmuth*, professeur à l'Inst. Ang. Analysis und Numwr. Simulation de l'Université de Stuttgart, Allemagne, *Bernd Flemisch*, étudiant en thèse du professeur Wohlmuth.

optimale la condition de couplage à l'interface entre sous-domaines, (ii) utilisation de multiplicateurs de Lagrange d'ordre élevé dans la condition de couplage.

Supposons, pour simplifier, que le domaine  $\Omega$  soit décomposé en deux sous-domaines  $\Omega_k$ ,  $k = 1, 2$ , tels que

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \quad \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2 = \bar{\Gamma}. \quad (31)$$

On cherche donc la solution  $u$  du problème (29) comme un couple  $(u_1, u_2)$  où  $u_1 = u|_{\Omega_1}$  et  $u_2 = u|_{\Omega_2}$ . L'application  $v \rightarrow (v_1 = u|_{\Omega_1}, v_2 = u|_{\Omega_2})$  est un isomorphisme de  $H^1(\Omega)$  sur l'espace

$$X = \{(v_1, v_2) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2), \quad \gamma_{1,\Gamma}(v_1) = \gamma_{2,\Gamma}(v_2)\}$$

où  $\gamma_{k,\Gamma} : H^1(\Omega_k) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  est l'opérateur de trace à l'interface  $\Gamma$  entre les deux sous-domaines. Ici, on a  $\gamma_{k,\Gamma}(v) = v|_{\Gamma}$ ,  $k = 1, 2$ . On remarque que  $X$  est un espace de Hilbert par rapport au produit scalaire  $(u, v)_* = \sum_{k=1}^2 (u_k, v_k)_{\Omega_k}$ , de norme (brisée) correspondante  $\|u\|_*^2 = \sum_{k=1}^2 \|u_k\|_{1,\Omega_k}^2$ . Le problème (29) se re-écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (u_1, u_2) \in X_0 \quad \text{tel que } \quad \forall (v_1, v_2) \in X_0 \\ \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \alpha \operatorname{grad} u_k \cdot \operatorname{grad} v_k = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} f|_{\Omega_k} v_k \end{aligned} \quad (32)$$

où  $X_0 = \{(v_1, v_2) \in X, \quad v_k|_{\partial\Omega_k \cap \partial\Omega} = 0, \quad k = 1, 2\}$ . Le problème (32) a une unique solution  $(u_1, u_2) \in X_0$ . On note que sans la *condition de couplage forte*  $v_1|_{\Gamma} = v_2|_{\Gamma}$  dans la définition de  $X$ , les deux problèmes (29) et (32) ne seraient pas équivalents.

Soient  $\mathcal{T}_H$  et  $\mathcal{T}_h$  deux maillages simpliciaux sur  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  respectivement, où  $H$  et  $h$  sont les diamètres maximaux des triangles. On introduit ensuite des espaces discrets d'éléments finis d'ordre un :

$$X_H(\Omega_1) = \{v \in H^1(\Omega_1) \mid v|_t \in \mathbb{P}_1(t), \quad \forall t \in \mathcal{T}_H\}$$

et  $X_h(\Omega_2)$  défini en utilisant  $\mathcal{T}_h$ . On note  $X_{H,0}(\Omega_1) = \{v \in X_H(\Omega_1) \mid v|_{\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega} = 0\}$  et  $X_{h,0}(\Omega_2) = \{v \in X_h(\Omega_2) \mid v|_{\partial\Omega_2 \cap \partial\Omega} = 0\}$ . L'espace des traces de fonctions de  $X_h(\Omega_2)$  sur  $\Gamma$  est noté  $W_h(\Gamma)$ . On note  $X_{*,0} = X_{H,0}(\Omega_1) \times X_{h,0}(\Omega_2)$  et chaque élément  $u_* \in X_{*,0}$  est un couple de fonctions  $(u_H, u_h)$ .

Si les triangulations des deux sous-domaines coïncident sur  $\Gamma$  (on parle de maillages conformes), alors on peut satisfaire exactement la condition de couplage forte. Mais la conformité des maillages à l'interface entre les sous-domaines est une condition trop contraignante si on veut améliorer l'efficacité des méthode locales (FEM ou SEM dans les sous-domaines) à travers, par exemple, un raffinement *hp* des éléments ou en présence de géométries mobiles (voir la section 4.3 pour un problème concret). L'idée à la base de la méthode MEM est de relaxer la contrainte de conformité, en imposant une *condition de couplage faible* à l'aide d'un espace de multiplicateurs de Lagrange. La clé de la méthode

MEM est la construction d'un "bon" espace discret de multiplicateurs de Lagrange afin d'assurer la stabilité du problème discret.

Soient

$$\begin{aligned} a(u_*, v_*)_* &= \int_{\Omega_1} \alpha \operatorname{grad} u_H \cdot \operatorname{grad} v_H + \int_{\Omega_2} \alpha \operatorname{grad} u_h \cdot \operatorname{grad} v_h, \\ (f, v_*)_* &= \int_{\Omega_1} f|_{\Omega_1} v_H + \int_{\Omega_2} f|_{\Omega_2} v_h \end{aligned}$$

les formes bilinéaire et linéaire définies sur  $X_{*,0}$ . Le problème discret s'écrit:

$$\text{Trouver } u_* \in \tilde{X}_{*,0} \quad \text{tel que} \quad a(u_*, v_*)_* = (f, v_*)_* \quad \forall v_* \in \tilde{X}_{*,0} \quad (33)$$

où  $\tilde{X}_{*,0} = \{u_* \in X_{*,0} \mid u_* \text{ vérifiant une condition de couplage faible sur } \Gamma\}$ . La conséquence immédiate de l'imposition d'une condition de couplage faible sur  $\Gamma$  est de travailler avec un espace discret  $\tilde{X}_{*,0}$  qui n'est plus un sous-espace de l'espace continu  $X$ .

Allons voir comment la condition de couplage faible sur  $\Gamma$  est définie pour la méthode MEM. L'évaluation de l'erreur entre la solution  $u$  du problème (32) et  $u_*$  du problème discret (33) peut être obtenue à partir du deuxième lemme de Berger-Scott-Strang [11].

**Lemma 4.1** *Si la forme bilinéaire  $a(.,.)_*$  est elliptique et continue sur  $X_{*,0}$ , alors la solution  $u$  du problème continu et  $u_*$  du problème discret vérifient l'estimation d'erreur suivante:*

$$\|u - u_*\|_* \leq C \left( \inf_{v_* \in X_{*,0}} \|u - v_*\|_* + \sup_{w_* \in X_{*,0}, w_* \neq 0} \frac{\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} [w_*]_{\Gamma}}{\|w_*\|_*} \right) \quad (34)$$

où  $[w_*]_{\Gamma} = w_H|_{\Gamma} - w_h|_{\Gamma}$ .

On observe ici, en plus de l'erreur d'approximation, l'apparition d'une erreur de consistance qui indique dans quelle mesure le problème discret approche bien le problème continu (29). L'erreur de consistance mesure le "crime" commis en travaillant avec un espace discret  $X_{*,0}$  qui n'est pas un sous-espace de  $X$ . Son estimation est le point critique de la méthode MEM car elle est décisive pour l'optimalité de la méthode.

On sait que pour le problème considéré, la solution "physique"  $u$  est continue à travers l'interface  $\Gamma$  alors que, dans le cas où les maillages des sous-domaines ne sont pas conformes, ce n'est pas vrai pour la solution  $u_*$  du problème discret. En fait, la restriction de la fonction  $u_H \in X_H(\Omega_1)$  à l'interface  $\Gamma$  n'est pas, en général, un élément de  $W_h(\Gamma)$ , si les triangulations des sous-domaines sont indépendantes l'une de l'autre et donc pas coïncidentes a priori sur  $\Gamma$ . Il y a donc la nécessité de bien choisir l'opérateur  $\Pi_h$  qui transporte l'information à travers l'interface  $\Gamma$  surtout si les maillages des sous-domaines ne sont pas conformes sur  $\Gamma$ . Ceci signifie un opérateur tel que, du point de vue théorique, l'erreur de consistance soit du même ordre que l'erreur d'approximation, et, du point de vue numérique, sa discrétisation soit simple et les caractéristiques de creusité, positivité et conditionnement de la matrice du système algébrique final à résoudre soient maintenues.

Afin d'avoir une estimation d'erreur a priori optimale, *i.e.*, l'erreur globale est bornée par la somme des erreurs locales dans les sous-domaines fois une constante qui ne dépend que de la solution, il faut bien choisir l'opérateur  $\Pi_h : H^1(\Omega) \rightarrow W_h(\Gamma)$  comme étant une projection sur  $W_h(\Gamma)$ , *i.e.*,  $\Pi_h v_h = v_h$  pour tout  $v_h \in W_h(\Gamma)$ , vérifiant

$$\|\Pi_h v\|_{1/2,\Gamma} \leq C \|v\|_{1/2,\Gamma}, \quad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega), \quad (35)$$

avec une constante  $C$  indépendante de  $h$  et où  $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma}$  est la norme usuelle sur  $H^{1/2}(\Gamma)$ . On remarque que si l'opérateur  $\Pi_h$  vérifie (35), alors on a la propriété d'approximation suivante sur  $H^{1/2}(\Gamma)$ :

$$\|v - \Pi_h v\|_{1/2,\Gamma} \leq Ch \|v\|_{3/2,\Gamma}, \quad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega).$$

Dans le cadre des méthodes MEM, l'opérateur  $\Pi_h$  est bien connu, et défini à l'aide d'un espace de multiplicateurs de Lagrange  $M_h(\Gamma)$  comme suit:

$$\int_{\Gamma} \Pi_h v \nu = \int_{\Gamma} v \nu, \quad \text{pour tout } \nu \in M_h(\Gamma). \quad (36)$$

La bonne définition de  $M_h(\Gamma)$  est le point clé pour obtenir un opérateur  $\Pi_h$  vérifiant (35). L'approche classique [13] est de prendre, pour le problème considéré, en dimension 2 par exemple

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_h(\Gamma) = \{ & \nu \in W_h(\Gamma) \mid \forall \text{ arête } e \in \mathcal{T}_h \cap \Gamma, \\ & \nu|_e \in \mathbb{P}_1(e), \text{ si les deux extrémités de } e \text{ sont sur } \Gamma \setminus \partial\Gamma \\ & \nu|_e \in \mathbb{P}_0(e), \text{ si } e \subset \Gamma \text{ mais une extrémité de } e \text{ est sur } \partial\Gamma \}. \end{aligned} \quad (37)$$

Si  $\partial\Gamma = \emptyset$ , l'espace  $\mathcal{M}_h$  coïncide avec  $W_h(\Gamma)$  mais si  $\partial\Gamma \neq \emptyset$ , alors l'espace  $\mathcal{M}_h$  est un sous-espace propre de  $W_h(\Gamma)$  (voir [124] pour un autre choix). L'avantage majeur de ce choix est que la matrice du système linéaire (36) est facile à assembler et à inverser, grâce au fait que toutes les fonctions impliquées dans (36) ont un support très localisé (pour le choix présenté dans [124], cette matrice est diagonale). La définition de l'espace  $\mathcal{M}_h(\Gamma)$  en trois dimensions est assez technique (on renvoi au Chapitre 5 dans [FRphd]). L'espace  $\tilde{X}_{*,0}$  du problème discret est donc:

$$\tilde{X}_{*,0} = \{u_* = (u_H, u_h) \in X_{*,0} \mid u_h = \Pi_h u_H \text{ sur } \Gamma\}.$$

#### 4.1.1 Discrétisation de la condition de couplage

Si l'on note  $M_\ell$  et  $M_r$  les matrices de masse correspondant, respectivement, à la partie de gauche et à celle de droite de (36), on obtient le système linéaire  $M_\ell \mathbf{u}_\Gamma = M_r \mathbf{u}_H$ , où  $\mathbf{u}_\Gamma$  représente le vecteur ("esclave") des valeurs approchées aux nœuds du maillage  $\mathcal{T}_h$  sur  $\Gamma$  et  $\mathbf{u}_H$  est celui ("maître") des valeurs approchées aux nœuds du maillage  $\mathcal{T}_H$ . La relation (36) s'écrit matriciellement  $\mathbf{u}_\Gamma = Q \mathbf{u}_H$ , avec  $Q = M_\ell^{-1} M_r$ .

Les éléments de la matrice  $M_\ell$  ne sont pas compliqués à évaluer vu qu'il s'agit de calculer des intégrales de la forme  $\int_{\text{arête}} \phi_h \psi_h$  en deux dimensions (resp.  $\int_{\text{face}} \phi_h \psi_h$  en trois dimensions), où les fonctions impliquées,  $\phi_h$  et  $\psi_h$ , sont définies sur le même maillage  $\mathcal{T}_h \cap \Gamma$ . Si l'on regarde de près les éléments de la matrice  $M_r$ , il s'agit de calculer des intégrales de la forme  $\int_{\text{arête}} \phi_H \psi_h$  en deux dimensions (resp.  $\int_{\text{face}} \phi_H \psi_h$  en trois dimensions) où  $\phi_H$  est une fonction de base de l'espace  $X_{H,0}(\Omega_1)$  et  $\psi_h$  est une fonction de base de l'espace des multiplicateurs de Lagrange  $M_h(\Gamma)$ . Pour calculer cette intégrale, il faudrait déterminer l'intersection entre les supports de  $\psi_h$  et  $\phi_H$ . Cette intersection est facile à calculer en deux dimensions, mais pas du tout en trois dimensions. On peut contourner cette difficulté en faisant appel aux formules de quadrature, en ramenant ainsi le calcul de l'intégrale au calcul de produits du type  $\phi_H(\xi) \psi_h(\xi)$  en des points de quadrature  $\xi$  définis sur  $\Gamma$ . Mais la situation n'est pas si simple.

Pour simplifier la présentation, on s'intéresse à ce qui se passe sur l'interface  $\Gamma$ . On note  $\Gamma^+$  (resp.  $v^+$ ) le côté maître de  $\Gamma$  (resp. la valeur de  $v$  sur le côté maître) et par  $\Gamma^-$  (resp.  $v^-$ ) le côté esclave de  $\Gamma$  (resp. la valeur de  $v$  sur le côté esclave). L'intégration numérique consiste à approcher l'intégrale sur le côté maître (resp. esclave) comme suit:

$$\int_{\Gamma^+} w^+ d\Gamma \approx \sum_+ w^+ \quad (\text{resp. } \int_{\Gamma^-} w^- d\Gamma \approx \sum_- w^-)$$

où  $\sum_+$  (resp.  $\sum_-$ ) représente la formule de quadrature sur le côté maître (resp. esclave). La condition de couplage faible devient alors

$$\int_{\Gamma^-} (v^- - v^+) \mu^- = 0, \quad \forall \Gamma^- \in \Gamma, \quad \forall \mu^- \in M_{-,h}.$$

Puisque  $v^-$  et  $\mu^-$  sont définies sur le côté esclave, il est naturel d'appliquer une formule de quadrature définie sur ce même côté pour calculer  $\int_{\Gamma^-} v^- \mu^-$ . On se propose d'utiliser une formule qui soit exacte sur ce côté, c'est-à-dire telle que  $\int_{\Gamma^-} v^- \mu^- = \sum_- v^- \mu^-$ .

Pour évaluer  $\int_{\Gamma^-} v^+ \mu^-$ , on a deux possibilités. Nous introduisons les deux espaces discrets  $X_{*,0}^{-+}$  et  $X_{*,0}^{--}$  suivants

$$\begin{aligned} X_{*,0}^{-+} &= \{v \in X_{*,0} \mid \sum_- v^- \cdot m_h^- = \sum_+ v^+ \cdot m_h^-, \quad \forall m_h \in M_h\}, \\ X_{*,0}^{--} &= \{v \in X_{*,0} \mid \sum_- v_h^- \cdot m_h^- = \sum_- v_h^+ \cdot m_h^-, \quad \forall m_h \in M_h\}. \end{aligned}$$

Avec l'introduction de ces deux espaces, le problème discret (32) devient respectivement

$$\text{Trouver } u_* \in X_{*,0}^{-+} \quad \text{tel que } a(u_*, v_*)_* = (f, v_*)_*, \quad \forall v_* \in X_{*,0}^{-+}, \quad (38)$$

$$\text{Trouver } u_* \in X_{*,0}^{--} \quad \text{tel que } a(u_*, v_*)_* = (f, v_*)_*, \quad \forall v_* \in X_{*,0}^{--}. \quad (39)$$

Une approche de type Galerkin pour résoudre (29) dans  $X_{*,0}^{-+}$  ou dans  $X_{*,0}^{--}$  conduit à une perte de précision. En effet, l'espace  $X_{*,0}^{-+}$  minimise l'erreur de consistance mais pas l'erreur d'approximation, alors que l'espace  $X_{*,0}^{--}$  fait exactement le contraire. Pour

conserver l’optimalité de l’approximation non-conforme, il faut adopter une approche “de type Petrov-Galerkin”, en choisissant un espace de fonctions tests différent de celui de la solution. Le problème (29) devient alors

$$\text{Trouver } u_* \in X_{*,0}^{--} \quad \text{tel que } a(u_*, v_*)_* = (f, v_*)_*, \quad \forall v_* \in X_{*,0}^{-+}. \quad (40)$$

Les résultats numériques dans [FR21] montrent que le problème (40) est bien posé et que l’approximation par l’approche de type Petrov-Galerkin est optimale.

Le choix de l’espace pour la solution du problème variationnel d’un côté et les fonctions tests de l’autre, peut être expliqué de la manière suivante. Dans une approche par méthode MEM, on est conduit à résoudre un problème couplé mixte de type Dirichlet-Neumann. Sur le côté esclave, on a un problème de Dirichlet où la condition au bord sur l’interface  $\Gamma$  est obtenue à partir de la trace sur  $\Gamma$  de la solution du côté maître. Comme c’est le cas pour des conditions non-homogènes de type Dirichlet, on écrit la condition au bord sous une forme intégrale (faible) à l’aide d’une formule de quadrature sur le maillage du côté esclave. Le choix naturel pour l’espace de la solution est donc  $X_{*,0}^{--}$ . D’autre part, sur le côté maître, on résout un problème de type Neumann où la condition au bord non homogène est obtenue à partir du résidu sur le côté esclave. Dans cette situation, l’utilisation d’une formule de quadrature basée sur le côté maître est un choix naturel. Les conditions au bord de type Neumann sont prises en compte sous une forme faible au second membre. Il en résulte que  $X_{*,0}^{-+}$  est le choix naturel pour l’espace des fonctions tests.

En trois dimensions, dans [FR26] on a montré qu’on peut conserver la précision avec une approche de type Galerkin (“même” espace pour la solution et les fonctions tests) en introduisant un troisième maillage  $\mathcal{T}$  sur  $\Gamma$ , indépendant des deux précédents  $\mathcal{T}_{h|\Gamma}$ ,  $\mathcal{T}_{H|\Gamma}$ . La formule de quadrature est donc définie sur les éléments de  $\mathcal{T}$ , qui peuvent être des triangles ou des quadrilatères, et projetée sur les triangles des deux autres maillages existants. L’optimalité de la méthode MEM est conservée dans ce cas. En deux dimensions, il suffit de définir le maillage  $\mathcal{T}$  sur  $\Gamma$  comme étant l’ensemble des arêtes de la ligne brisée passant par tous les sommets de  $\mathcal{T}_{h|\Gamma}$  et  $\mathcal{T}_{H|\Gamma}$ .

#### 4.1.2 Multiplicateurs de Lagrange d’ordre élevé dans la condition de couplage

Dans l’analyse de la distributions des courants induits dans une machine électrique, il est important de bien gérer l’échange des quantités physiques à l’interface entre la partie mobile et la partie fixe de la machine. Une mauvaise approximation à l’interface de glissement peut entraîner l’apparition d’oscillations dans, par exemple, les valeurs numériques du couple moteur de la machine, jusqu’à influencer négativement la conception d’une telle machine. Pour augmenter la précision de l’approche MEM à l’interface entre les sous-domaines, on peut penser à enrichir l’espace discret localement sur  $\Gamma$ . Pour éviter que l’éventuel enrichissement (fonctionnel) sur  $\Gamma$  ne se propage à l’intérieur des

sous-domaines, on utilise une interpolation d'ordre élevé de type hiérarchique sur  $\Gamma$ .<sup>10</sup>

Voyons le cas général. Sur un tétraèdre  $t = \{o, i, j, k\}$ , on considère les fonctions barycentriques  $\{\lambda_\ell\}$  associées aux sommets de  $t$ . Nous introduisons ensuite les fonctions bulles associées aux arêtes,  $\beta_e = \lambda_o \lambda_i$ ,  $e = \{o, i\}$ , aux faces  $\beta_f = \lambda_o \lambda_i \lambda_j$ ,  $f = \{o, i, j\}$ , et au tétraèdre,  $\beta_t = \lambda_o \lambda_i \lambda_j \lambda_k$ . Chaque arête est paramétrisée en termes de la variable  $\xi_e = \lambda_i - \lambda_o$ , si  $e = \{o, i\}$ . Dans le cas d'éléments finis nodaux, l'espace  $V_p(t)$  d'interpolation polynomiale hiérarchique d'ordre  $p$  sur  $t$  est engendré par les fonctions suivantes:

$$\begin{aligned} \phi^v &= \lambda_v, \quad v \text{ sommet de } t \\ \phi_\ell^e &= \beta_e L_\ell(\xi_{oi}), \quad e = \{o, i\} \text{ arête de } t, \quad 0 \leq \ell \leq p-2, \\ \phi_{\ell m}^f &= \beta_f L_\ell(\xi_{oi}) L_m(\xi_{oj}), \quad f = \{o, i, j\} \text{ face de } t, \quad 0 \leq \ell + m \leq p-3, \\ \phi_{\ell mn}^t &= \beta_t L_\ell(\xi_{oi}) L_m(\xi_{oj}) L_n(\xi_{ok}), \quad \text{intérieur au tétraèdre } t, \quad 0 \leq \ell + m + n \leq p-4, \end{aligned}$$

où  $L_\ell$  est le polynôme de Legendre de degré  $\ell$ . Le terme hiérarchique indique la propriété suivante: si  $V_p(t) = \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_s\}$  alors  $V_{p+1}(t) = \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_s, \phi_{s+1}, \dots, \phi_r\}$ , où  $s = \dim V_p(t)$  et  $r = \dim V_{p+1}(t)$ . Les polynômes de Legendre sont généralement considérés dans ce type de construction car ils fournissent des matrices (de masse et de raideur) qui sont bien conditionnées.

Dans [FR29], nous avons enrichi l'espace discret sur l'interface  $\Gamma$  jusqu'à un degré d'interpolation polynomiale égal à 3. La taille locale des matrices  $M_\ell$  et  $M_r$  passe de 2 dans le cas d'une interpolation linéaire telle qu'on l'a décrite auparavant, à 4 dans le cas d'une interpolation cubique. Les tests numériques décrits dans [FR29] attestent d'une amélioration dans la description des quantités physiques intéressantes (comme par exemple la f.é.m. du champ magnétique) sur l'interface  $\Gamma$ . Grâce à la géométrie circulaire de l'interface  $\Gamma$ , dans [FR29] on a pu calculer analytiquement les intégrales de la condition de couplage. Pour d'autres types de géométries, dans le cas d'une interpolation polynomiale d'ordre élevé sur  $\Gamma$ , se pose à nouveau le problème de comment définir une formule de quadrature d'ordre élevé sur le maillage (*e.g.* en triangles dans le cas tridimensionnel) de  $\Gamma$  (voir Chapitre 1).

## 4.2 Le cas d'une décomposition de $\Omega$ avec recouvrement entre sous-domaines

Soit  $\omega$  un sous-domaine de  $\Omega$  tel que  $\bar{\omega} \subset \Omega$ : on appelle  $\omega^c = \Omega \setminus \bar{\omega}$  son complémentaire dans  $\Omega$  et  $\Gamma$  sa frontière. On va résoudre d'abord le problème (29) dans  $\Omega$  et un problème additionnel dans  $\omega$ , en utilisant comme condition au bord de type Dirichlet la trace de la solution du problème (29) sur  $\Gamma$ . Le nouveau problème s'écrit:

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (u, u_\omega) &\in H_0^1(\Omega) \times H_u^1(\omega) \quad \text{tel que} \\ a_\Omega(u, v) &= (f, v)_\Omega \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega), \\ a_\omega(u_\omega, v_\omega) &= (f, v_\omega)_\omega \quad \text{pour tout } v_\omega \in H_u^1(\omega), \end{aligned} \tag{41}$$

<sup>10</sup>En collaboration avec *O. J. Antunes* du Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina, Florianopolis (Brasil) et l'équipe *MSE* du LGEP (plateau de Moulon, Paris).

où  $H_u^1(\omega) = \{v \in H^1(\omega) : v|_\Gamma = u|_\Gamma\}$ ,  $a_\omega(u, v) = \int_\omega \alpha \nabla u \cdot \nabla v$  et  $(f, v)_\omega = \int_\omega f v$ . Il est clair que dans le cas continu, le problème (41) nous donne  $u_\omega = u|_\omega$ , mais au niveau discret, la situation est un peu plus compliquée.

Nous allons introduire deux maillages simpliciaux,  $\mathcal{T}_H$  sur  $\Omega$  et  $\mathcal{T}_h$  sur  $\omega$ , où  $H$  et  $h$  sont respectivement les diamètres maximaux des triangles. Ces deux maillages sont complètement indépendants l'un de l'autre. En particulier,  $\mathcal{T}_{H|\omega} \neq \mathcal{T}_h$ . De plus, les arêtes du maillage  $\mathcal{T}_h$  qui sont sur  $\Gamma$  ne coïncident pas avec des arêtes du maillage  $\mathcal{T}_H$ . On utilise ensuite des éléments finis d'ordre un sur les deux maillages. On note

$$X_H(\Omega) = \{v_H \in H^1(\Omega) \mid v_H|_t \in \mathbb{P}_1(t), \forall t \in \mathcal{T}_H\}$$

et de même  $X_h(\omega)$  défini sur  $\mathcal{T}_h$ . On introduit ensuite  $X_{H,0} = \{v \in X_H \cap \mid v|_{\partial\Omega} = 0\}$  et  $X_{h,0} = \{v \in X_h \mid v|_\Gamma = 0\}$ , les espaces discrets qui prennent en compte les conditions au bord de type Dirichlet sur  $\partial\Omega$  et sur  $\Gamma$ . L'espace des traces de fonctions de  $X_h(\omega)$  sur  $\Gamma$  est noté  $W_h(\Gamma)$ . Comme cela arrive dans le cas sans recouvrement, la restriction de la fonction  $u_H \in X_H(\Omega)$  à l'interface  $\Gamma$  n'est pas, en général, dans  $W_h(\Gamma)$ , vu que les deux maillages sont complètement indépendants l'un de l'autre et ne coïncident pas sur  $\Gamma$ . Le problème de Dirichlet sur  $X_h(\omega)$  ne peut pas être résolu directement, on doit introduire l'opérateur  $\Pi_h$  défini dans (36) qui transporte l'information de  $X_H(\Omega)$  à  $W_h(\Gamma)$  (et la définition de  $X_h(\omega)$  va changer un peu). On a donc le problème discret suivant.

$$\begin{aligned} \text{Trouver } & (u_H, u_h) \in X_{H,0}(\Omega) \times X_{h,u}(\omega) \quad \text{tel que} \\ & a_\Omega(u_H, v_H) = (f, v_H)_\Omega \quad \text{pour tout } v_H \in X_{H,0}(\Omega), \\ & a_\omega(u_h, v_h) = (f, v_h)_\omega \quad \text{pour tout } v_h \in X_{h,0}(\omega), \end{aligned} \quad (42)$$

où  $X_{h,u}(\omega) = \{v_h \in X_h(\omega) : v_h = \Pi_h u_H \text{ sur } \Gamma\}$ . La solution discrète  $u_*$  est donc donnée par  $u_H$  sur  $\omega^c$  et  $u_h$  sur  $\omega$ . En général,  $u_* \notin H_0^1(\Omega)$ . L'erreur  $E = u - u_\delta$  est mesurée dans la norme  $H^1(\Omega)$  brisée et elle se répartit sur  $\omega^c$  et  $\omega$  comme suit,  $\|E\|_{1,\Omega}^2 = \|u - u_H\|_{1,\omega^c}^2 + \|u - u_h\|_{1,\omega}^2$ . Dans notre cas, on peut montrer que  $\|E\|_{1,\Omega} \leq C \max(H, h) \|u\|_{2,\Omega}$ , et les résultats numériques le confirment.

Si l'on regarde de près les éléments de la matrice  $M_r$ , il s'agit de calculer des intégrales de la forme  $\int_{\text{arête}} \phi_H \psi_h$  en deux dimensions (resp.  $\int_{\text{face}} \phi_H \psi_h$  en trois dimensions) sur une arête (resp. face) d'un triangle (resp. tétraèdre)  $T \in \mathcal{T}_h$  qui touche le bord  $\Gamma$  de  $\omega$ ,  $\phi_H$  est une fonction de base de l'espace  $X_{H,0}(\Omega)$  et  $\psi_h$  est une fonction de base de l'espace des multiplicateurs de Lagrange  $M_h(\Gamma)$ . Pour calculer cette intégrale, il faudrait déterminer l'intersection entre une surface  $(d-1)$ -dimensionnelle (arête pour  $d=2$ , face pour  $d=3$ ) et le support  $d$ -dimensionnel de la fonction  $\phi_H$ . On peut contourner cette difficulté en faisant appel aux formules de quadrature, en ramenant ainsi le calcul de l'intégrale au calcul de produits du type  $\phi_H(\xi) \psi_h(\xi)$  en des points de quadrature  $\xi$  définis sur  $\Gamma$ . Il reste à mettre au point un algorithme de recherche rapide pour déterminer les fonctions  $\phi_H$  dont le support contient les points de quadrature. Les éléments de la matrice  $M_\ell$  ne sont pas compliqués à évaluer vu qu'il s'agit de calculer des intégrales de la forme

$\int_{\text{arête}} \phi_h \psi_h$  en deux dimensions (resp.  $\int_{\text{face}} \phi_h \psi_h$  en trois dimensions) où les fonctions impliquées,  $\phi_h$  et  $\psi_h$ , sont définies sur le même maillage  $\mathcal{T}_h \cap \Gamma$ .

Pour arriver à la forme matricielle du problème discret (42), on organise les nœuds de  $\mathcal{T}_h$  en deux ensembles, le bloc  $I$  des nœuds internes à  $\omega$  et le bloc  $B$  des nœuds de bord sur  $\Gamma$ . La matrice  $A_h$  associée au problème de Dirichlet sur  $X_{h,0}(\omega)$  s'écrit

$$A_h = \begin{pmatrix} A_{II} & A_{IB} \\ 0 & Id \end{pmatrix}.$$

Le problème discret (42) a donc la forme matricielle suivante:

$$\begin{pmatrix} A_H & 0 & 0 \\ 0 & A_{II} & A_{IB} \\ -Q & 0 & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_H \\ (\mathbf{u}_h)_I \\ (\mathbf{u}_h)_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_H \\ (\mathbf{f}_h)_I \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

où  $A_H$  est la matrice globale associée au problème discret dans  $X_{H,0}(\Omega)$ . Le premier bloc d'inconnues étant découplé du reste, on peut résoudre le système en deux étapes, *i.e.*,

$$\mathbf{u}_H = A_H^{-1} \mathbf{f}_H, \quad (\mathbf{u}_h)_I = A_{II}^{-1} ((\mathbf{f}_h)_I - A_{IB} Q \mathbf{u}_H). \quad (44)$$

On remarque que les matrices  $A_H$  et  $A_h$  ne sont pas modifiées si  $\omega$  se déplace dans  $\Omega$ . De plus, on n'a pas besoin de refaire le maillage, c'est bien pour ça que cette technique est adaptée pour des problèmes en présence de sous-domaines en mouvement. La seule matrice à reconstruire est  $Q$  qui dépend de la position de  $\omega$  dans  $\Omega$ .

La présentation de la méthode MEM pour le problème scalaire (28) (dans le cas d'une décomposition de domaine sans et avec recouvrement entre les sous-domaines), a pour fin d'introduire les outils de base de la méthode dans un cadre plus simple que celui du problème de la magnétodynamique.

### 4.3 Formulation $T$ - $\Phi$ pour le problème de la magnétodynamique

Supposons maintenant que  $\omega$  soit un conducteur immergé dans un champ magnétique généré par des sources avec support dans l'isolant  $\omega^c$ . Des courants induits vont être générés dans le conducteur soit parce que le conducteur bouge dans  $\Omega$ , soit parce que le courant source (et donc le champ magnétique) est variable dans le temps. La distribution des courants induits dans  $\Omega$  est solution du problème de la magnétodynamique suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times H = J, \\ \nabla \times E = -\partial_t(\mu H), \\ \nabla \cdot (\mu H) = 0, \\ J = \sigma E, \\ \text{dans } \omega \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times H = J_s, \\ \nabla \cdot (\mu H) = 0, \\ \text{dans } \omega^c, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} [H]_\Gamma \times n_\Gamma = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ H \times n_{\partial\Omega} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \text{condition initiale sur } H, \end{array} \right. \quad (45)$$

où  $H$  est le champ magnétique,  $E$  le champ électrique,  $\sigma \geq \sigma_0 > 0$  la conductivité électrique,  $\mu$  la permeabilité magnétique,  $n_\Gamma$  (resp.  $n_{\partial\Omega}$ ) la normale sortante à  $\Gamma$  (resp.  $\partial\Omega$ ) et  $[v]_\Gamma$  dénote le saut de la quantité  $v$  à l'interface  $\Gamma$ .

Afin de ramener le calcul à des quantités scalaires, quand c'est possible, on a recours à l'introduction d'un potentiel scalaire  $\tilde{\Phi}$  défini dans  $\Omega$  et un potentiel vecteur électrique  $\tilde{T}$  associé au courant  $J$  et limité à  $\omega$  tel que  $H = \tilde{T} - \nabla\tilde{\Phi}$  sur  $\omega$  et  $H = T_s - \nabla\tilde{\Phi}$  sur  $\omega^c$ , où  $T_s$  est le potentiel vecteur électrique associé au courant source  $J_s$ . On considère les équations variationnelles définissant  $H$  qui sont

$$\int_{\Omega} \mu H \cdot \nabla v = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (46)$$

obtenue à partir de  $\nabla \cdot (\mu H) = 0$  dans  $\Omega$ , et

$$\int_{\omega} \frac{1}{\sigma} \nabla \times H \cdot \nabla \times W + \int_{\omega} \partial_t(\mu H) \cdot W = 0, \quad \forall W \in H_0(\text{curl}, \omega), \quad (47)$$

obtenue à partir de (45) dans  $\omega$ , où  $H_0(\text{curl}, \omega) = \{W \in H(\text{curl}, \omega) : W \times n_\Gamma = 0\}$  (voir [58] pour les propriétés de cet espace). En partant de (46) et (47), et après discrétisation de la dérivée partielle en temps par un schéma implicite aux différences finies, on obtient la formulation pour déterminer  $\tilde{T}$  et  $\tilde{\Phi}$  au temps courant :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (\tilde{T}, \tilde{\Phi}) \in H_0(\text{curl}; \omega) \times H_0^1(\Omega) & \quad \text{tel que} \\ a(\tilde{\Phi}, v) + \hat{b}_c(\tilde{T}, v) &= \int_{\omega^c} f \cdot \nabla v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ a_c(\tilde{T}, W) + \hat{b}_c(W, \tilde{\Phi}) &= \int_{\omega} f_c \cdot W, \quad \forall W \in H_0(\text{curl}; \omega), \end{aligned} \quad (48)$$

où  $f_c$  dépend de l'approximation de  $\tilde{T}$  et  $\tilde{\Phi}$  au temps précédent et  $f$  dépend de  $T_s$ . Les formes bilinéaires introduites dans (48) sont définies comme suit:

$$\begin{aligned} a_c(\tilde{T}, W) &:= \int_{\omega} (\alpha \nabla \times \tilde{T} \cdot \nabla \times W + \tilde{T} \cdot W), \quad \forall T, W \in H_0(\text{curl}; \omega), \\ \hat{b}_c(W, v) &:= - \int_{\omega} W \cdot \nabla v, \quad \forall W \in H_0(\text{curl}; \omega), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ a(\tilde{\Phi}, v) &:= \int_{\Omega} \beta \nabla \tilde{\Phi} \cdot \nabla v, \quad \forall \Phi, v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (49)$$

où les coefficients  $\alpha, \beta > 0$  sont constants par morceaux. Ils dépendent de  $\sigma, \mu$  et du pas de temps  $\Delta t$ , e.g.,  $\alpha = \frac{\Delta t}{\mu\sigma}$  sur  $\omega$ ,  $\beta = 1$  sur  $\omega$  et  $\beta \geq 1$  sur  $\omega^c$ .

Une *première difficulté* apparaît: le problème (48) n'admet pas une solution unique. En effet, si  $(\tilde{T}, \tilde{\Phi})$  est une solution de (48), alors  $(\tilde{T} + \nabla\xi, \tilde{\Phi} + \xi)$ ,  $\xi \in H_0^1(\omega)$ , l'est aussi. On choisit donc une condition (de type jauge) qui impose à  $\Phi = \tilde{\Phi} + \xi$ , d'être harmonique dans  $\omega$ . On aboutit alors à la formulation variationnelle

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (T, \Phi) \in H_0(\text{curl}; \omega) \times H_0^1(\Omega) & \quad \text{tel que} \\ a(\Phi, v) + b_c(T, v) &= \int_{\omega^c} f \cdot \nabla v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ a_c(T, W) + b_c(W, \Phi) &= \int_{\omega} f_c \cdot W, \quad \forall W \in H_0(\text{curl}; \omega) \end{aligned} \quad (50)$$

où  $b_c(W, v) := -\int_{\omega} W \cdot \nabla \mathcal{H} v$ , pour  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,  $W \in H_0(\text{curl}; \omega)$ , et  $\mathcal{H} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^1(\omega)$  est l'opérateur de relèvement harmonique défini par

$$\mathcal{H}v|_{\Gamma} := v|_{\Gamma}, \quad \int_{\omega} \nabla \mathcal{H}v \cdot \nabla w = 0, \quad \forall w \in H_0^1(\omega). \quad (51)$$

Dans [FR47, FR23] on montre que la forme bilinéaire  $a_g((W, w), (V, v)) := a_c(W, V) + b_c(W, v) + b_c(V, w) + a(w, v)$ , pour  $V, W \in H_0(\text{curl}; \omega)$  et  $v, w \in H_0^1(\Omega)$  est continue et elliptique sur  $H_0(\text{curl}; \omega) \times H_0^1(\Omega)$ . On en déduit que le problème (50) possède une solution et une seule.

Considérons maintenant la discrétisation de (50). Ce problème faisant intervenir une quantité scalaire sur  $\Omega$  et une quantité vectorielle sur  $\omega$ , on peut penser à utiliser, dans le cadre d'une discrétisation en éléments finis, deux maillages différents : l'un,  $\mathcal{T}_H$ , sur  $\Omega$  pour calculer  $\Phi$  et indexé par  $H$  et l'autre,  $\mathcal{T}_h$ , sur  $\omega$  pour calculer  $T$  et indexé par  $h$ . Les deux maillages sont construits indépendamment, car le conducteur  $\omega$  peut bouger dans  $\Omega$  au cours du temps. La discrétisation de ce problème se fait en utilisant des éléments finis d'arête pour  $T$  (espace noté  $S_{h,0}(\omega)$ ) et des éléments finis standards pour  $\Phi$  et  $\Phi|_{\omega}$  (espaces notés  $X_{H,0}(\Omega)$  et  $X_h(\omega)$ ). On rappelle que  $W_h(\Gamma)$  est l'espace des traces de fonctions de  $X_h(\omega)$  sur  $\Gamma$ . La forme  $b_c$  faisant intervenir un relèvement harmonique, doit être discrétisée, et alors *deux autres difficultés* surgissent. On doit tout d'abord définir un tel relèvement discret  $\mathcal{H}_h$  mais aussi un opérateur  $\Pi_h$  de passage d'information du maillage de  $\Gamma$  provenant du maillage de  $\Omega$  à celui de  $\Gamma$  provenant du maillage de  $\omega$ . Pour  $\mathcal{H}_h : W_h(\Gamma) \rightarrow X_h(\omega)$ , on considère la définition suivante:

$$\mathcal{H}_h v|_{\Gamma} := v|_{\Gamma}, \quad \int_{\omega} \nabla \mathcal{H}_h v \cdot \nabla w = 0, \quad \forall w \in X_h(\omega) \cap H_0^1(\omega). \quad (52)$$

L'opérateur de passage  $\Pi_h$  est nécessaire car la restriction de  $v \in X_{H,0}(\Omega)$  sur  $\Gamma$  n'est pas une fonction de  $W_h(\Gamma)$ . On ne peut donc pas appliquer directement l'opérateur de relèvement discret  $\mathcal{H}_h$  à la restriction de  $v \in X_{H,0}(\Omega)$  sur  $\Gamma$ . Nous proposons de réaliser cette opération de manière optimale comme indiqué dans la section 4.1, inspirée par la méthode MEM. Le problème discret à résoudre est reformulé en termes de  $\mathcal{H}_h$  et  $\Pi_h$  comme suit:

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (T_h, \Phi_H) \in S_{h,0}(\omega) \times X_{H,0}(\Omega) & \quad \text{tel que} \\ a(\Phi_H, v) + b_h(T_h, v) &= \int_{\omega^c} f \cdot \nabla v, \quad \forall v \in X_{H,0}(\Omega), \\ a_c(T_h, W) + b_h(W, \Phi_H) &= \int_{\omega} f_c \cdot W, \quad \forall W \in S_{h,0}(\omega), \end{aligned} \quad (53)$$

où  $b_h(W, v) := -\int_{\omega} W \cdot \nabla \mathcal{H}_h \Pi_h v$ , pour  $v \in X_{H,0}(\Omega)$  et  $W \in S_{h,0}(\omega)$ . Dès lors que le rapport  $h/H$  est assez petit, le problème (53) possède une solution unique et on a l'estimation d'erreur suivante [FR23],

$$\| \|T - T_h\| \|_{\omega} + \|\Phi - \Phi_H\|_{1;\Omega} \leq C \left( h(\|T\|_{1;\omega} + \|\nabla \times T\|_{1;\omega}) + H^{\beta-1} \|\Phi\|_{\beta;\Omega} \right), \quad (54)$$

valable dès que  $T \in (H^1(\omega))^3$  avec  $\nabla \times T \in (H^1(\omega))^3$  et  $\Phi \in H^\beta(\Omega)$ , pour un réel  $1 < \beta \leq 2$ , où  $\|\cdot\|_\omega$  est une norme de l'énergie équivalente à la norme usuelle sur l'espace  $H_0(\text{curl}; \omega)$  et définie comme suit :  $\|T\|_\omega^2 := \|T\|_{0;\omega}^2 + \alpha \|\nabla \times T\|_{0;\omega}^2$ .

Si l'on note  $A$  et  $A_c$  les matrices de raideur associées aux formes bilinéaires  $a(\cdot, \cdot)$  et  $a_c(\cdot, \cdot)$ , la forme matricielle du problème (53) est donnée par

$$\begin{aligned} A_c T_h + P B S Q \Phi_H &= F_c, \\ A \Phi_H + Q^t S^t B^t T_h &= F, \end{aligned} \tag{55}$$

où  $Q$  est la matrice associée à  $\Pi_h$ ,  $S$  est associée au relèvement harmonique,  $B$  celle associée à la forme  $b_h$  et  $P$  une matrice de troncature qui va garantir la prise en compte de conditions de type Dirichlet homogènes pour  $T_h$  sur  $\Gamma$  (on a confondu les fonctions discrètes  $\Phi_H$  et  $T_h$  avec les vecteurs d'inconnues qui leurs sont associés dans les bases respectives). Pour la résolution de (55), on considère l'algorithme de type Gauss-Seidel suivant : connaissant  $\Phi_H^n$ , on calcule  $T_h^{n+1}$  par

$$A_c T_h^{n+1} + P B S Q \Phi_H^n = F_c$$

et  $\Phi_H^{n+1}$  par

$$A \Phi_H^{n+1} + Q^t S^t B^t T_h^{n+1} = F.$$

Cette méthode itérative de Gauss-Seidel converge sans paramètre de relaxation [FR47, FR23].

Les premiers résultats numériques sont présentés dans [FR33] avec une reformulation de la méthode itérative de Gauss-Seidel comme méthode de Richardson preconditionnée. Dans [FR34], le couplage potentiel vecteur et scalaire est utilisé dans le cadre d'un problème couplé magnéto-mécanique pour la simulation d'un frein électromagnétique.

Pour les raisons expliquées ci-après, la méthode MEM est bien adaptée pour la prise en compte du mouvement dans ce contexte. Essayons de voir pourquoi.

Pour aborder le problème de la magnétodynamique en présence de conducteurs mobiles, il faut choisir le repère par rapport auquel on va écrire les équations du problème. Soit par exemple  $\mathcal{R}$  un repère lié à l'isolant  $\omega^c$  et  $\mathcal{R}_c$  un repère lié au conducteur  $\omega$ . Si l'on note  $v$  la vitesse du conducteur, la loi d'Ohm liant le courant (induit) au champ électrique dans le repère  $\mathcal{R}$  va être  $J = \sigma(E + v \times B)$  dans  $\omega$  et  $J = \sigma E$  dans  $\omega^c$ . On voit donc que si on utilise un seul repère  $\mathcal{R}$  pour décrire le problème dans  $\omega^c$  et dans  $\omega$  (approche *eulérienne*), le terme de convection  $v \times B$  apparait explicitement dans les équations pour prendre en compte le mouvement de  $\omega$ . Pour ne pas avoir ce terme de convection à discrétiser, on va écrire les équations dans chaque sous-domaine par rapport à un repère attaché au sous-domaine (approche *lagrangienne*). Dans notre cas, les équations dans  $\omega^c$  sont écrites par rapport au repère  $\mathcal{R}$ , et celles dans  $\omega$  par rapport à  $\mathcal{R}_c$ . Les équations dans les différents sous-domaines sont alors couplées aux interfaces à l'aide de conditions de transmission, qui sont prises en compte (faiblement) par

la méthode MEM. L’aspect important qui fait que tout marche bien dans l’approche lagrangienne, est que les équations du problème de la magnétodynamique gardent la même forme dans  $\omega^c$  et  $\omega$  [FR22], parce que les courants de déplacement sont négligés par rapport aux courants de conduction [21]. C’est grâce à cet aspect du problème de la magnétodynamique, pour des vitesses non relativistes des conducteurs [48], qu’on peut adopter une approche lagrangienne par morceaux, qui permet d’avoir des discrétisations et des approximations indépendantes dans les sous-domaines, couplées dans la suite par la méthode MEM.

#### 4.4 Conclusions et perspectives

Il reste à valider la méthode MEM avec recouvrement entre les sous-domaines sur un cas concret, par exemple, le problème de lévitation électrodynamique décrit dans le Team Workshop Problem 28 [72] pour lequel on a des mesures expérimentales.

Cette version avec recouvrement de la méthode MEM se prête aussi à d’autres applications. Un exemple de champ d’application est fourni par l’élastodynamique (par exemple, la tectonique des plaques).

Grâce au couplage entre la méthode MEM avec recouvrement et la méthode TSEM décrite dans le chapitre 1 de ce mémoire, on pourrait essayer d’aborder des applications “multi-échelles”, qui ont besoin d’une résolution “fine” (en termes de taille des éléments du maillage et du degré d’approximation) en certaines parties du domaine de calcul, sans propager cette résolution dans tout le domaine.

Pour ce qui concerne les méthodes non-conformes de décomposition de domaine, j’ai récemment abordé des façon indirecte<sup>11</sup> les méthodes de type Galerkin discontinu (MGD) [FR44] d’ordre élevé pour la résolution numérique des équations de Maxwell. Une comparaison numérique entre les méthodes MEM et MGD serait intéressante pour étudier les performances d’une méthode par rapport à l’autre.

---

<sup>11</sup>Co-encadrement de la thèse de Hassan Fahs avec Stéphane Lanteri (DR INRIA) responsable du projet NACHOS, INRIA Sophia-Antipolis à partir de septembre 2005 sur les “Méthodes de type Galerkin Discontinu en maillages tétraédriques pour la modélisation numérique de la propagation d’un champ électromagnétique dans des tissus biologiques” (bourse co-financée par le Ministère de l’Enseignement Supérieur et de la Recherche et de France Telecom Recherche & Développement, La Turbie).

## 5 Publications

Liste des publications de F. Rapetti avant ou issues de la Thèse

### Thèse de Doctorat

- [FRphd] F. RAPETTI – Approximation des équations de la magnétodynamique en domaine tournant par la méthode des éléments avec joints, *Thèse de Doctorat* de l'Université de Paris 6, 2000.

### Chapitre de livre

- [FR1] A. BUFFA, Y. MADAY, F. RAPETTI – The mortar element method for 3D Maxwell's equations : analysis and application to magnetodynamics, dans *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering*, procs. 12th Int. Conf. on Domain Decomposition Methods, Chiba, Japan, eds. T. Chan, T. Kako, H. Kawarada, O. Pironneau, ddm.org publications (2001) pp. 259-270.

### Publications dans des revues internationales avec comité de lecture

- [FR2] F. RAPETTI – Finite element approximation of elasto-dynamic problems in unbounded domains, *East-West Journal of Numerical Mathematics*, vol. 3, no. 4 (1996) 255-279.
- [FR3] L. PISANI, F. RAPETTI, C. VITTOLI – A Kirchhoff integral approach for decimetric radiowave propagation in urban areas, *ACES (Appl. Comp. Electromagnetics Soc.) Journal*, vol. 13, no. 1 (1998) 63-70.
- [FR4] F. RAPETTI, L. SANTANDREA, F. BOUILLAULT, A. RAZEK – Calculation of eddy currents in moving structures using a finite element method on non-matching grids, *COMPEL (Int. J. for Comp. and Math. in Electric and Electronic Eng.)*, vol. 19, no. 1 (2000) 10-19.
- [FR5] A. BUFFA, Y. MADAY, F. RAPETTI – A sliding mesh-mortar method for a two dimensional eddy currents model of electric engines, *Méth. Math. en Anal. Num.*, vol. 35, no. 2 (2001) 191-228.
- [FR6] F. RAPETTI, A. BUFFA, F. BOUILLAULT, Y. MADAY – Simulation of a coupled magneto-mechanical system through the sliding-mesh mortar element method, *COMPEL (Int. J. for Comp. and Math. in Electric and Electronic Eng.)*, vol. 19, no. 2 (2000) 332-340.
- [FR7] L. FORMAGGIA, C. MANZI, F. RAPETTI – Function approximation on triangular grids: some numerical results using adaptive techniques, *Appl. Num. Math.*, vol. 32, no. 4 (2000) 389-399.

- [FR8] F. RAPETTI, A. TOSELLI – A FETI preconditioner for two dimensional edge element approximations of Maxwell equations on non-matching grids, *SIAM J. on Scient. Comp.*, vol. 23, no. 1 (2001) 92-108.
- [FR9] A. BUFFA, Y. MADAY, F. RAPETTI – Calculation of eddy currents in moving structures by a sliding mesh-finite element method, *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 36, no. 4 (2000) 1356-1359.
- [FR10] F. RAPETTI, F. BOUILLAUT, L. SANTANDREA, A. BUFFA, Y. MADAY, A. RAZEK – Calculation of eddy currents with edge elements on non-matching grids in moving structures, *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 36, no. 4 (2000) 1351-1355.
- [FR11] A. BUFFA, Y. MADAY, F. RAPETTI – An electromagnetic damping machine: model, analysis and numerics, *Boll. Unione Matematica Italiana*, Sez. B Artic. Ric. Mat. vol. (8) 4, no. 1 (2001) 121-129.
- [FR12] F. RAPETTI – The mortar edge element method on non-matching grids for eddy current calculations in moving structures, *Int. J. Num. Meth. in Engng.*, vol. 14, no. 6 (2001) 457-477.
- [FR13] F. BOUILLAUT, A. BUFFA, Y. MADAY, F. RAPETTI – Simulation of a magneto-mechanical damping machine: analysis, discretization and results, *Computer Methods in Appl. Mech. and Engng.*, vol. 191, no. 23-24 (2002) 2587-2610.

#### Rapports de recherche au CRS4

- [FR14] L. FORMAGGIA, F. RAPETTI – MeSh2D (Unstructured Mesh Generator in 2D) (version 1.0), Algorithm Overview and Description, *rapport technique CRS4-TECH-REP-96/4*, 1996.
- [FR15] L. FORMAGGIA, F. RAPETTI – MeSh2D (Unstructured Mesh Generator in 2D), A User's Guide, *rapport technique CRS4-TECH-REP-96/6*, 1996.
- [FR16] G. FOTIA, L. PISANI, F. RAPETTI, C. VITTOLI – Dimensionamento di Coperture Radioelettriche per Sistemi Microcellulari - Sviluppo di Strumenti di Calcolo I, *rapport technique CRS4-TECH-REP-96/56*, 1996.
- [FR17] L. PISANI, F. RAPETTI, C. VITTOLI – Dimensionamento di Coperture Radioelettriche per Sistemi Microcellulari - Sviluppo di Strumenti di Calcolo II, *rapport technique CRS4-TECH-REP-96/57*, 1996.
- [FR18] L. PISANI, F. RAPETTI, C. VITTOLI – Dimensionamento di Coperture Radioelettriche per Sistemi Microcellulari - Sviluppo di Strumenti di Calcolo III, *rapport technique CRS4-TECH-REP-96/58*, 1996.

- [FR19] F. RAPETTI – Finite element analysis of scattering problems, *rapport technique* CRS4-TECH-REP-97/23, 1997.

Liste des publications de F. Rapetti après la thèse de doctorat

### Livre

- [FR20] C. BERNARDI, Y. MADAY, F. RAPETTI – Discrétisations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques, *Mathématiques & Applications*, vol. 45, n. ISBN-3-540-21369-4, Springer-Verlag, May 2004.

### Chapitres de livres avec comité de lecture

- [FR21] Y. MADAY, F. RAPETTI, B. I. WOHLMUTH – The influence of quadrature formula in 2D and 3D mortar methods, dans “Recent Developments in Domain Decomposition Methods”, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, vol. 23, pp. 203-221, Springer-Verlag, 2002.
- [FR22] A. BUFFA, Y. MADAY, F. RAPETTI – Applications of the mortar element method to 3D electromagnetic moving structures, dans “Computational Electromagnetics”, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, vol. 28, pp. 35-50, Springer-Verlag, 2003.
- [FR23] Y. MADAY, F. RAPETTI, B. I. WOHLMUTH – Mortar element coupling between global scalar and local vector potentials to solve eddy current problems, dans “Numerical mathematics and advanced applications”, *Enumath 2001 proc.*, Brezzi F., Buffa A., Corsaro S., Murli A. eds., pp. 847-865, Springer-Verlag Italy, 2003.
- [FR24] R. PASQUETTI, L. F. PAVARINO, F. RAPETTI, E. ZAMPIERI – Overlapping Schwarz preconditioners for Fekete spectral elements, dans “Domain Decomposition Methods in Science and Engineering”, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, vol. 55, pp. 717-724, Springer-Verlag, 2006.
- [FR25] V. DOLEAN, R. PASQUETTI, F. RAPETTI – p-Multigrid for Fekete spectral element method, dans “Domain Decomposition in Science and Engineering XVII”, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, vol. 60, pp. 485-492, Springer-Verlag, 2007.

### Publications dans des revues internationales avec comité de lecture

- [FR26] F. BOUILLAULT, A. BUFFA, Y. MADAY, F. RAPETTI – The mortar edge element method in three dimensions: application to magnetostatics, *SIAM J. on Scient. Comp.*, vol. 24, no. 4 (2002) 1303-1327.

- [FR27] F. RAPETTI, Y. MADAY, F. BOUILLAUT, A. RAZEK – Eddy current calculations in three-dimensional moving structures, *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 38, no. 2 (2002) 613-616.
- [FR28] A. BEN ABDALLAH, F. BEN BELGACEM, Y. MADAY, F. RAPETTI – Mortaring the two-dimensional edge elements for the discretization of some electromagnetic models, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 28 (2005) 2007-2029.
- [FR29] O. J. ANTUNES, J.P.A. BASTOS, N. SADOWSKI, A. RAZEK, L. SANTANDREA, F. BOUILLAUT, F. RAPETTI – Using hierarchic interpolation with mortar and moving band methods for electrical machines analysis, *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 41, no. 5 (2005) 1472-1475.
- [FR30] O. J. ANTUNES, J. P. A. BASTOS, N. SADOWSKI, A. RAZEK, L. SANTANDREA, F. BOUILLAUT, F. RAPETTI – Torque calculation with conforming and non-conforming movement interface, *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 42, no. 4 (2006) 983-986.
- [FR31] O. J. ANTUNES, J. P. A. BASTOS, N. SADOWSKI, A. RAZEK, L. SANTANDREA, F. BOUILLAUT, F. RAPETTI, Comparison between non-conforming movement methods, *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 42, no. 4 (2006) 599-602.
- [FR32] F. RAPETTI, F. DUBOIS, A. BOSSAVIT – Discrete vector potentials for non-simply connected three-dimensional domains, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 41, no. 4 (2003) 1505-1527.
- [FR33] B. FLEMISCH, Y. MADAY, F. RAPETTI, B. WOHLMUTH – Coupling scalar and vector potentials on nonmatching grids for eddy currents in a moving conductor, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 168, no. 1-2 (2004) 191-205.
- [FR34] B. FLEMISCH, Y. MADAY, F. RAPETTI, B. I. WOHLMUTH – Scalar and vector potentials' coupling on nonmatching grids for the simulation of an electromagnetic brake, *COMPEL (Int. J. for Comp. and Math. in Electric and Electronic Eng.)*, vol. 24, no. 1 (2005) 1061-1070.
- [FR35] C. BERNARDI, Y. MADAY, F. RAPETTI – Basics and some applications of the mortar element method, *GAMM – Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 28, no. 2 (2005) 97-123.
- [FR36] R. PASQUETTI, F. RAPETTI – Spectral element methods on triangles and quadrilaterals: comparisons and applications, *Journal of Computational Physics*, vol. 198, no. 1 (2004) 349-362.

- [FR37] R. PASQUETTI, F. RAPETTI – Spectral element methods on unstructured meshes: comparisons and recent advances, *Journal of Scientific Computing*, vol. 27, no. 1-3 (2006) 377-387.
- [FR38] A. BOSSAVIT, F. RAPETTI – A prolongation/restriction operator for Whitney elements on simplicial meshes, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 43, no. 5 (2005) 2077-2097.
- [FR39] F. BEN BELGACEM, C. BERNARDI, F. RAPETTI – Numerical analysis of a model for an axisymmetric guide for electromagnetic waves. Part I: The Fourier analysis, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 28 (2005) 2007–2029.
- [FR40] A. BOSSAVIT, F. RAPETTI – Geometrical localization of the degrees of freedom for Whitney elements of higher order, special issue on "Computational Electromagnetics", of the *IEE Sci. Meas. Technol.*, vol. 1, no. 1 (2007) 63–66.
- [FR41] R. PASQUETTI, L. F. PAVARINO, F. RAPETTI, E. ZAMPIERI – Neumann-Neumann-Schur complement methods for Fekete spectral elements, special issue on "Spectral Interpolation and Applications", *Journal of Engineering Mathematics*, vol. 56, no. 3 (2006) 323–335.
- [FR42] R. PASQUETTI, L. F. PAVARINO, R. PASQUETTI, E. ZAMPIERI – Overlapping Schwarz methods for Fekete and Gauss-Lobatto spectral elements, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 29, no. 3 (2007) 1073–1092.
- [FR43] F. RAPETTI – High order edge elements on simplicial meshes, *Méth. Math. en Anal. Num.*, vol. 41, no. 6 (2007) 1001-1020.
- [FR44] H. FAHS, L. FEZOU, S. LANTERI, F. RAPETTI – Preliminary investigation of non-conforming discontinuous Galerkin methods for solving the time domain Maxwell equations, *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 44, no. 6 (2008) 1254–1257.
- [FR45] R. PASQUETTI, F. RAPETTI –  $p$ -multigrid method for Fekete-Gauss spectral element approximations of elliptic problems, *Communications in Computational Physics*, accepté.

### Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences

- [FR46] F. RAPETTI, F. DUBOIS, A. BOSSAVIT – Integer matrix factorization for mesh defects detection, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I 334 (2002) 717-720.
- [FR47] Y. MADAY, F. RAPETTI, B. WOHLMUTH – Coupling between scalar and vector potentials by the mortar element method, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I 334 (2002) 933-938.

- [FR48] F. RAPETTI – Weight computation for simplicial Whitney forms of degree one, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I 341 (2005) 519-523.
- [FR49] G. LOEPER, F. RAPETTI – Numerical resolution of the Monge-Ampère equation by a Newton’s algorithm, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I 340 (2005) 319-324.

### Rapports de recherche

- [FR50] Y. MADAY, F. RAPETTI – The mortar element method for variational approximations: basics, exercises and numerics, support de cours, *Ecole d’Eté CEA-EDF-INRIA* sur les “Méthodes Numériques et Informatiques de couplage multiphysiques”, du 14 au 25 juin 2004 au Centre de Séminaires Port-Royal à Saint-Lambert des Bois (78) en région parisienne.
- [FR51] H. FAHS, S. LANTERI, F. RAPETTI – Etude de stabilité d’une méthode Galerkin discontinu pour la résolution numérique des équations de Maxwell 2D en domaine temporel sur des maillages triangulaires non-conformes, *Rapport de recherche INRIA* no. RR-6023, Nov. 2006.
- [FR52] H. FAHS, S. LANTERI, F. RAPETTI – A  $hp$ -like discontinuous Galerkin method for solving the 2D time-domain Maxwell’s equations on non-conforming locally refined triangular meshes, *Rapport de recherche INRIA* no. RR-6162, Feb. 2007.

### Prépublications

- [FR53] A. BOSSAVIT, F. RAPETTI – Whitney forms of higher degree, octobre 2007.
- [FR54] F. RAPETTI, A. BOSSAVIT – High order Whitney elements, proc. Acomen 08 conference, mars 2008.

## 6 Références

1. M. ABRAMOWITZ, I.A. STEGUN – Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables, *Wiley-Interscience* (1972).
2. Y. ACHDOU, Y. MADAY – The mortar element method with overlapping subdomains, dans *Domain Decomposition Methods in Sciences and Engineering*, T. Chan, T. Kako, H. Kawarada & O. Pironneau eds., ddm.org (1999) 73–82.
3. Y. ACHDOU, Y. MADAY – The mortar element method with overlapping subdomains. *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 40, no. 2 (2002) 601–628.
4. M. AINSWORTH, J. COYLE, P.D. LEDGER, K. MORGAN – Computation of Maxwell eigenvalues using higher order edge elements in three-dimensions. *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 39 (2003) 2149-2153.

5. M. AINSWORTH, J. COYLE – Hierarchic finite element bases on unstructured tetrahedral meshes, *Int. J. Numer. Meth. Engr.*, vol. 58 (2003) 2103-2130.
6. R. ALBANESE, G. RUBINACCI – Formulation of eddy-current problem, *IEE Proc. A* 137 (1990) 16-22.
7. M.A. ARMSTRONG – Basic Topology, *Springer-Verlag*, New York (1983).
8. D. ARNOLD, R. FALK, R. WINTHER – Finite element exterior calculus, homological techniques, and applications, *Acta Numerica*, vol. 15 (2006) 1-155.
9. I. BABUSKA – The  $p$  and  $hp$  versions of the finite element method: the state of the art. Finite elements. Theory and application, dans *Proc. ICASE Workshop*, Hampton/VA (1986) 199-239.
10. F. BEN BELGACEM – Partie I : Méthodes des éléments finis avec joints pour divers problèmes aux limites, *HdR*, Université Pierre et Marie Curie (2006).
11. A. BERGER, R. SCOTT, G. STRANG – Approximate boundary conditions in the finite element method, *Symposia Mathematica*, vol.X (1972) 295-313.
12. C. BERNARDI, Y. MADAY – Spectral methods, dans *Handbook of Numerical Analysis*, vol. V, partie 2, North-Holland (1997) 209-485.
13. C. BERNARDI, Y. MADAY, A. PATERA – A new non-Conforming approach to domain decomposition: the mortar element method. Seminaire XI du College de France, édité par Brezis, H., Lions, J. dans *Nonlinear partial differential equations and their applications*, Pitman, (1994) 13-51.
14. C. BERNARDI, Y. MADAY, A. PATERA – Domain decomposition by the mortar element method, dans *Asymptotic and Numerical Methods for Partial Differential Equations with Critical Parameters*, édité par H. G. Kaper et M. Garbey, N.A.T.O. ASI Series, C 384, Kluwer (1993) 269-286.
15. C. BERNARDI, V. GIRAULT, F. HECHT, H. KAWARADA, O. PIRONNEAU – A fictitious domain problem, dans *Computational fluid and solid mechanics*, vol. 1-2 Elsevier, Amsterdam (2001) 1524-1525.
16. I. BICA – Iterative substructuring methods for the  $p$ -version finite element method for elliptic problems, *PhD thesis*, Courant Institute, New York University (1997) TR 1997-743.
17. P.B. BOCHEV, C.J. GARASI, J.J. HU, A.C. ROBINSON, R.S. TUMINARO – An improved algebraic multigrid method for solving Maxwell's equations, *SIAM J. Sci. Comp.*, vol. 25 (2003) 623-642.

18. L. BOS – On certain configurations of points in  $R^n$  which are uniresolvant for polynomial interpolation, *J. Approx. Theory*, vol. 64 (1991) 271-280.
19. L. BOS, M.A. TAYLOR, B.A. WINGATE – Tensor product Gauss-Lobatto points are Fekete points for the cube, *Math. Comp.*, vol. 70 (2001) 1543-1547.
20. A. BOSSAVIT – On finite elements for the electricity equation, dans *The Mathematics of Finite Elements*, J.R. Whiteman ed., Academic Press, London (1982) 85-92.
21. A. BOSSAVIT – Computational Electromagnetism, *Academic Press*, New York (1998).
22. A. BOSSAVIT – Géométrie de l'électromagnétisme et éléments finis, vol. 1, Gérard Meunier ed., *Hèrmes-Lavoisier*, Paris (2003).
23. A. BOSSAVIT, J. C. VERITÉ – A mixed FEM-BIEM method to solve eddy-current problems, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 18 (1982) 431-435.
24. A. BOSSAVIT – Generating Whitney forms of polynomial degree one and higher, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 38 (2002) 341-344.
25. F. BREZZI, J.-L. LIONS, O. PIRONNEAU – Analysis of a chimera method, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I.*, vol. 332 (2001) 655-660.
26. X.-C. CAI, M. DRYJA, M. SARKIS – Overlapping nonmatching grid mortar element methods for elliptic problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 36 (1999) 581-606.
27. C. CANUTO, P. PIETRA – Boundary and interface Conditions in Finite Element Preconditioners for Chebyshev Methods, *J. Comput. Phys.*, vol. 91 (1990) 310-343.
28. C. CANUTO, M. Y. HUSSAINI, A. QUARTERONI, T. ZANG – Spectral Methods in Fluid Dynamics, *Springer-Verlag* (1987).
29. C. CANUTO, M. Y. HUSSAINI, A. QUARTERONI, T. ZANG – Spectral Methods. Evolution to complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics, *Springer-Verlag* (2007).
30. E. CARTAN – Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, *Hermann*, Paris (1945).
31. M. A. CASARIN – Quasi-optimal Schwarz methods for the conforming spectral element discretization, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 34 (1997) 2482-2502.

32. M. A. CASARIN, S. J. SHERWIN – Low-energy basis preconditioning for elliptic substructured solvers based on unstructured spectral/ $hp$  element discretization, *J. Comput. Phys.*, vol. 171 (2001) 394-417.
33. T. F. CHAN – Rank revealing QR factorizations, *Linear algebra and its applications*, vol 88/89 (1987) 67-82.
34. Q. CHEN, I. BABUSHKA – Approximate optimal points for polynomial interpolation of real functions in an interval and in a triangle, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 128 (1995) 485-494.
35. Q. CHEN, I. BABUSKA – The optimal symmetrical points for polynomial interpolation of real functions in a tetrahedron, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 137 (1996) 89-94.
36. P. CIARLET, JR. – Augmented formulations for solving Maxwell equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 194 (2005) 559-586.
37. M. CLEMENS, S. FEIGH, T. WEILAND – Geometric multigrid algorithms using the conformal finite integration technique, *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 40 (2004) 1065-1068.
38. R. COOLS – Advances in multidimensional integration, *J. of Comput. and Appl. Math.*, vol. 149 (2002) 1-12.
39. COULOMB J.L. – Finite element three dimensional magnetic field computation, *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 17 (1981) 3241-3246.
40. M. O. DEVILLE, E. H. MUND – Chebyshev pseudospectral solution of second-order elliptic equations with finite element preconditioning, *J. Comput. Phys.*, vol. 60 (1985) 517-533.
41. M. DEVILLE, E. MUND – Finite element preconditioning for pseudospectral solutions of elliptic problems, *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, vol. 11 (1990) 311-342.
42. M. O. DEVILLE, P. F. FISCHER, E. H. MUND – High-order methods for incompressible fluid flow, *Cambridge University Press* (2002).
43. C. R. DOHRMANN – A preconditioner for substructuring based on constrained energy minimization, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 25 (2003) 246-258.
44. M. DRYJA, O. WIDLUND – Domain decomposition algorithms with small overlap, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 15 (1994) 604-620.
45. M. DUBINER – Spectral methods on triangles and other domains, *J. Sci. Comput.*, vol. 6 (1991) 345-390.

46. F. DUBOIS – Discrete vector potential representation of a divergence-free vector field in three-dimensional domains: numerical analysis of a model problem, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 27 (1990) 1103-1141.
47. J.-G. DUMAS, F. HECKENBACH, D. SAUNDERS, V. WELKER – Computing Simplicial Homology Based on Efficient Smith Normal Form Algorithms, dans *Proc. Integration of Algebra and Geometry Software Systems* (2002) 177-207.
48. C.R.I. EMSON, C.P. RILEY, D.A. WALSH, K. UEDA, T. KUMANO – Modelling eddy currents induced in rotating systems, *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 34 (1998) 2593–2596.
49. B. ENGQUIST, A. MAYDA – Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves, *Math. Comp.*, vol. 31 (1977) 629-651.
50. C. FARHAT, M. LEISSOINE, K. PIERSON – A scalable dual-primal domain decomposition method, *Numer. Linear Algebra Appl.*, vol. 7 (2000) 687-714.
51. L. FEJÉR – Bestimmung derjenigen Abszissen eines Intervalles für welche die Quadratsumme der Grundfunktionen der Lagrangeschen Interpolation im Intervalle  $[-1, 1]$  ein möglichst kleines Maximum besitzt, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Mt. Ser. II*, 1 (1932) 263-276.
52. P.F. FISCHER – An overlapping Schwarz method for spectral element solution of the incompressible Navier-Stokes equations, *J. Comput. Phys.*, vol. 133 (1997) 84-101.
53. P.F. FISCHER, J.W. LOTTES – Hybrid Schwarz-Multigrid methods for the spectral element method: Extensions to Navier-Stokes, *J. Sci. Comput.*, vol. 6 (2005) 345-390.
54. B. FLEMISCH, B. I. WOHLMUTH – A domain decomposition method on nested domains and nonmatching grids, *Numer. Methods Partial Differ. Equations*, vol. 20 (2004) 374-387.
55. B. FLEMISCH, M. MAIR, B. I. WOHLMUTH – Nonconforming discretization techniques for overlapping domain decompositions, M. Feistauer et. al (eds.), dans “Numerical Mathematics and Advanced Applications”, *Proc. of ENUMATH 2003*, Springer (2004) 316-325.
56. V. GIRAULT, R. GLOWINSKI, H. LPEZ, J.-P. VILA – A boundary multiplier / fictitious domain method for the steady incompressible Navier-Stokes equations, *Numer. Math.*, vol. 88 (2001) 75-103.
57. V. GIRAULT, R. GLOWINSKI – Error analysis of a fictitious domain method applied to a Dirichlet problem, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, vol. 12 (1995) 487–514.

58. V. GIRAULT, P.-A. RAVIART – Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms, *Springer-Verlag* (1986).
59. R. GLOWINSKI, T.W. PAN, J. PERIAUX – A fictitious domain method for Dirichlet problem and applications, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, vol. 3 (1994) 283–304.
60. R. GLOWINSKI, J. HE, J. RAPPAZ, J. WAGNER – Approximation of multi-scale elliptic problems using patches of finite elements, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 337 (2003) 679–684.
61. J. GOPALAKRISHNAN, L.E. GARCIA-CASTILLO, L.F. DEMKOWICZ – Nédélec spaces in affine coordinates, *ICES Report no. 03-48* (2003).
62. D. GOTTLIEB, S.A. ORSZAG – Numerical Analysis of Spectral Methods, Theory and Applications, *SIAM Publications*, Philadelphia, PA (1977).
63. R.D. GRAGLIA, D.R. WILTON, A.F. PETERSON – Higher order interpolatory vector bases for computational electromagnetics. *IEEE Trans. on Ant. and Propag.*, vol. 45 (1997) 329-342.
64. J.S. HESTHAVEN – From electrostatic to almost optimal nodal sets for polynomial interpolation in a simplex, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 35 (1998) 655-676.
65. J.S. HESTHAVEN, C.H. TENG – Stable spectral methods on tetrahedral elements, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 21 (2000) 2352-2380.
66. J.S. HESTHAVEN, T. WARBURTON – Nodal high-order methods on unstructured grids, *J. Comput. Phys.*, vol. 181 (2002) 186-221.
67. F. HETCH – Construction d'une base de fonctions  $\mathbb{P}_1$  non conforme à divergence nulle dans  $\mathbb{R}^3$ , *Math. Mod. and Numer. Anal.*, vol. 15 (1980) 315-341.
68. R. HIPTMAIR – Multigrid method for Maxwell's equations, *SIAM J. Num. Anal.*, vol. 36 (1998) 204-225.
69. R. HIPTMAIR – High order Whitney forms *Prog. In Electr. Res. (PIER)*, vol. 32 (2001) 271-299.
70. R. HIPTMAIR – Canonical construction of finite elements, *Math. Comp.*, vol. 68 (1999) 1325-1346.
71. N. HU, .-Z. GUO, I. N. KATZ – Bounds for eigenvalues and condition number in the  $p$ -version of the finite element method, *Math. Comp.*, vol. 67 (1998) 1423-1450.
72. H. KARL, J. FETZER, S. KURZ, G. LEHNER, W. M. RUCKER – Description of TEAM Workshop Problem 28: An Electrodynamical Levitation Device, <http://www.lmn.pub.ro/team/Problems.html>.

73. G.E. KARNIADAKIS, S.J. SHERWIN – Spectral hp element methods for CFD, *Oxford Univ. Press*, London (1999).
74. A. KLAWONN, L. PAVARINO – Overlapping Schwarz methods for mixed linear elasticity and Stokes problems, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 165 (1998) 233-245.
75. A. KLAWONN, O. B. WIDLUND, M. DRYJA – Dual-primal FETI methods for three-dimensional elliptic problems with heterogeneous coefficients, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 40 (2002) 159-179.
76. D. KOMATITSCH, R. MARTIN, J. TROMP, M.A. TAYLOR, B. A. WINGATE – Wave propagation in 2-D elastic media using a spectral element method with triangles and quadrangles, *J. Comput. Acoustics*, vol. 9 (2001) 703-718.
77. P. R. KOTIUGA – Hodge decompositions and computational electromagnetics, *PhD*, Dpt. of Electrical Engng., Mc Gill University, Montréal (1984).
78. Y. MADAY, R. MUNOZ – Spectral element multigrid. II. Theoretical Justification, *J. Sci. Comput.*, vol. 3 (1988) 323-353.
79. Y. MADAY, A. T. PATERA – Spectral element methods for the Navier-Stokes equations, dans A. K. Noor et J. T. Oden, editors, *State-Of-The-Art Survey in Computational Mechanics*, Chapitre 3, ASME (1989).
80. J. MANDEL, M. BREZINA – Balancing domain decomposition for problems with large jumps in coefficients, *Math. Comp.*, vol. 65 (1996) 1387-1401.
81. J. MANDEL, C. R. DOHRMANN – Convergence of a balancing domain decomposition by constraints and energy minimization, *Numer. Linear Algebra Appl.*, vol. 10 (2003) 639-659.
82. J. MANDEL, C. R. DOHRMANN, R. TEZAUER – An algebraic theory for primal and dual substructuring methods by constraints, *Appl. Numer. Mat.*, vol. 54 (2005) 167-193.
83. C. MAVRIPLIS, J.V. ROSENDALE – Triangular Spectral Elements for Incompressible Fluid Flow, *AIAA proc.* (1993) paper 3346.
84. J.M. MELENK – On condition numbers in hp-FEM with Gauss-Lobatto-based shape functions, *J. of Comp. and Appl. Math.*, vol. 139 (2002) 21-48.
85. G. MUR, A. T. DE HOOP – A finite-element method for computing three-dimensional electromagnetic fields in inhomogeneous media, *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 19 (1985) 2188-2191.

86. G. MUR – Edge elements, their advantages and their disadvantages, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 30 (1994) 3552-3557.
87. J.C. NÉDÉLEC – Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ , *Numer. Math.*, vol. 35 (1980) 315-341.
88. J.-C. NÉDÉLEC – Acoustic and Electromagnetic Equations: Integral Representation for Harmonic Problems, *Springer* eds., New York (2001).
89. S. A. ORSZAG, Spectral methods in complex geometries, *J. Comput. Phys.*, vol. 37 (1980) 70-92.
90. A. T. PATERA – A spectral method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion, *J. Comp. Phys.*, vol. 54 (1984) 468-488.
91. L. PAVARINO – Additive Schwarz methods for the  $p$  version Finite element method, *Numer. Math.*, vol. 66 (1994) 493-515.
92. L. PAVARINO – Neumann-Neumann algorithms for spectral elements in three dimensions, *Math. Mod. and Numer. Anal.*, vol. 31 (1997) 471-493.
93. L. PAVARINO, T. WARBURTON – Overlapping Schwarz methods for unstructures spectral elements, *J. Comput. Phys.*, vol. 160 (2000) 298-317.
94. L. PAVARINO, O. WIDLUND – Balancing Neumann-Neumann methods for incompressible Stokes equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 55 (2002) 302-335.
95. L. PAVARINO – BDDC and FETI-DP preconditioners for spectral element discretizations, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 196 (2007) 1380-1388.
96. K. PREIS, I. BARDI, O. BIRO, C. MAGELE, G. VRISK, K. R. RICHTER – Different finite element formulations of 3D Magnetostatics fields, *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 28 (1992) 1056-1059.
97. A. QUARTERONI, A. VALLI – Numerical approximation of partial differential equations, *Springer-Verlag* (1994).
98. A. QUARTERONI, E. ZAMPIERI – Finite element preconditioning for Legendre spectral collocation approximations to elliptic equations and systems, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 29 (1992) 917-936.
99. M. PICASSO, J. RAPPAZ, V. REZZONICO – Multiscale algorithm with patches of finite elements, *Commun. Numer. Meth Engrg.*, accepté.
100. E.M. RONQUIST, A.T. PATERA – Spectral element multigrid. 1- Formulation and numerical results, *J. Sci. Comput.*, vol. 2 (1987) 389-405.

101. S. REITZINGER, J. SCHÖBERL – An algebraic multigrid method for finite element discretizations with edge elements *Num. Lin. Alg. with Appl.*, vol. 9 (2002) 223-238.
102. E.M. RØNQUIST, A.T. PATERA – A Legendre spectral element method for the incompressible Navier-Stokes equations, dans *Seventh GAMM-Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics proc.*, Lovain-la-Neuve, Belgium, edited by M. Deville, Vieweg (1988) 318-326.
103. E.M. RØNQUIST – Optimal spectral element methods for the unsteady three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations, *PhD* (1988).
104. C. SCHWAB – *p*- and *hp*-Finite Element Methods. Theory and Applications in Solid and Fluid Mechanics, *Oxford University Press*, New York (1998).
105. C. SCHWAB – *hp*-FEM for fluid flow simulation, dans “High-order methods for computational physics”, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, vol. 9, T.J. Barth and H. Deconinck (Eds), Springer-Verlag (1999) 325-438.
106. H.J.S. SMITH – On systems of linear indeterminate linear equations, *Phil. Trans.*, vol. 151 (1861) 293-326.
107. B. F. SMITH, P. E. BJØRSTAD, W. D. GROPP – Domain Decomposition. Parallel multilevel methods for elliptic partial differential equations, *Cambridge University Press* (1996).
108. J. STILLWELL – Classical Topology and combinatorial group theory, *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 72, Springer-Verlag (1972).
109. A. STROUD – Approximate calculations of multiple integrals, *Prentice Hall* (1971).
110. D. SUN, J. MANGES, X. YUAN, Z. CENDES – Spurious modes in finite-element methods, *IEEE Ant. Propag.*, vol. 37 (1995) 12-24.
111. S. SUURINIEMI, T. TARHASAARI, L. KETTUNEN – Generalization of the spanning-tree technique, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 38 (2002) 525-528.
112. B. SZABO, I. BABUSKA – Finite element analysis, *John Wiley & Sons*, New York (1991).
113. M.A. TAYLOR, B.A. WINGATE – A generalized diagonal mass matrix spectral element method for non-quadrilateral elements, *Appl. Num. Math.*, vol. 33 (2000) 259-265.
114. M.A. TAYLOR, B.A. WINGATE, R.E. VINCENT – An algorithm for computing Fekete points in the triangle, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 38 (2000) 1707-1720.

115. M.A. TAYLOR, B.A. WINGATE, L.P. BOS – A new algorithm for computing multivariate Gauss-like quadrature points, *ICOSAHOM 2004 Congress Proc.*, Brown University (2004).
116. A. TOSELLI, O. WIDLUND – Domain Decomposition Methods–Algorithms and Theory, *Springer-Verlag* (2005).
117. L. R. TURNER, R. J. LARI – Developments in eddy current computation with EDDYNET, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 19 (1983) 2577-2580.
118. S. WANDZURA, H. XIAO – Symmetric quadrature rules on a triangle, *Comput. Math. Appl.*, vol. 45 (2003) 1829-1840.
119. T. WARBURTON, L. PAVARINO, J.S. HESTHAVEN – A pseudo-spectral scheme for the incompressible Navier-Stokes equations using unstructured nodal elements, *J. of Comput. Phys.*, vol. 164 (2000) 1-21.
120. J.P. WEBB, B. FORGHANI – Hierarchical scalar and vector tetrahedra. *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 29 (1993) 1495-1498.
121. P. WESSELING – An introduction to multigrid methods, *R.T. Edwards, Inc.* (2004).
122. H. WHITNEY – Geometric integration theory, *Princeton Univ. Press* (1957).
123. B.A. WINGATE, M.A. TAYLOR – Performance of numerically computed quadrature points, *Appl. Num. Math.*, accepté.
124. B. I. WOHLMUTH – A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 38 (2000) 989-1012.
125. B. I. WOHLMUTH – Discretization Techniques and Iterative Solvers Based on Domain Decomposition, *Lectures Notes in Computational Science and Engineering*, vol. 17 (2001).