Corrigé succint du CAPLP Externe Math-Sciences 2005

version provisoire, contactez moi par email pour les coquilles SVP.
NB: le corrigé est en style sténographique. Il est bien entendu que le candidat devra plus rédiger et expliciter les étapes du raisonnement le jour du concours.

1 Exercice 1, questions diverses d'analyse

1. (a) Vraie, diviser par $xy > 0$ ou utiliser la stricte décroissance de $x \mapsto 1/x$ sur $]0, +\infty[$ et $] - \infty, 0[$
   (b) Faux : problème en 0, $I :=] - 1, 1[$, $x \mapsto |x|$ ou $x \mapsto x \sin(1/x)$(prolongée en zéro).
   (c) Vraie: dérivée composée
2. par la contraposée: $n = 2p + 1 \Rightarrow n^2 = 1[2]$
3. $n = 1$ OK et $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n + 1$

2 Exercice 2, QCM

1. c) limite$= 2 + \sqrt{3} \simeq 3,73205080757$
2. a) $a = 2\pi/3$
3. a) Les tirages sont équiprobables,$\omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$, X la variable alátoire qui représente le résultat du dé du joueur A, Y la variable alátoire qui représente le résultat du dé du joueur B.

   La probabilité demandée est: $P(|X - Y| \leq 2) = P(X = Y) + P(X = Y - 1) + P(X = Y + 1) + P(X = Y - 2) + P(X = Y + 2) = P(X = Y) + 2P(X = Y + 1) + 2P(X = Y + 2) = \frac{1}{36}(6 + 2 \times 5 + 2 \times 4) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$
4. d) Vive la relation de Chasles. $\vec{IA}+\vec{IB} = \vec{O}$ car I est le milieu de $[AB]$. $\vec{MA}+\vec{MB} = 2\vec{MI}+\vec{IA}+\vec{IB} = 2\vec{MI}$

   De même soit J le milieu de $[IC]$, on a $\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} = 2\vec{MI} + 2\vec{MC} = 4\vec{MJ}$ et
   $\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC} = 2\vec{MI} - 2\vec{MC} = 2\vec{JI} - 2\vec{JC} = 4\vec{JI} = 2\vec{CI}$.

   Ainsi (E) est l'ensemble des points M du plan qui vérifient $MJ = IJ$.

3 Exercice 3, un calcul élémentaire de l'intégrale de Gauss

Partie A:

1. $I_0 = \pi/2$, $I_1 = 1$

2.
$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t)dt = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) \times \cos^2(t)dt = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) \times (1-\sin^2(t))dt \\
&= I_n + \int_0^{\pi/2} (-)\sin(t)\cos^n(t) \times \sin(t)dt \\
&= I_n + \left[\frac{\cos^n(t)}{n+1} \times \sin(t)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n(t)}{n+1} \times \cos(t)dt \\
&= I_n + 0 - \frac{I_{n+2}}{n+1}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a: $I_n = I_{n+2}\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) = I_{n+2}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$.

3. $u_{n+1} = [(n+2)I_{n+2}]I_{n+1} = [(n+1)I_n]I_{n+1} = u_n$

4. $u_0 = \dfrac{\pi}{2}$

5. Pour $t \in [0, \pi/2]$, $0 \leq \cos(t) \leq 1$, pour $y \in [0,1]$ la suite géométrique $(y^n)_n$ est décroissante, l'intégrale étant monotone, $(I_n)_n$ est décroissante.

   L'intégrant étant strictement positif sur $]0, \pi/2[$, I_n l'est aussi. On peut aussi conclure grâce à légalité de 3. et 4.:
$$(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2} \tag{1}$$

6. Comme I_n est toujours strictement positive, on va pouvoir diviser par I_n et I_{n+2}.

   De $I_{n+1} \leq I_n$ on en déduit que $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$.

   De (1) et de la monotonie de la suite $(I_n)_n$ on tire: $\dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{I_{n+2}}{I_n} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$.

   On en déduit, grâce au théorème des gendarmes:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1, \text{ i.e.} I_{n+1} \sim I_n$$

7. Des résultats de 6. on en déduit que
$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \tag{2}$$

Partie B:

1. Etude de fonction ou concavité de $x \mapsto \ln(1+x)$.

   Pour le même prix on a aussi, par convexité de la fonction exp ou par 1.,
$$1 + x \leq \exp(x)$$

2. Ainsi; $1 + \dfrac{u}{n} \leq \exp\left(\dfrac{u}{n}\right)$, et par monotonie de $x \mapsto x^n$ sur $[0, +\infty[$,
$$\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \leq \exp(u) \tag{3}$$

3. $0 \leq t \leq \sqrt{n} \Rightarrow 0 \leq t^2 \leq n$ et $-t^2 \geq -n$.
   De (3), on a avec $u = -t^2$,
$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq \exp(-t^2) \tag{4}$$
   De même, de (3), on a avec $u = t^2$, $\left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^n \leq \exp(t^2)$, puis en prenant l'inverse:
$$\exp(-t^2) \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \tag{5}$$

4. (a) On peut vérifier que le changement de variable est correct sur cet intervalle.
   $t = \sqrt{n}\sin u \Rightarrow dt = \sqrt{n}\cos(u)du$
$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{\sqrt{n}} \exp(-t^2)dt \geq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \\ &\geq \int_0^{\pi/2} \sqrt{n}\left(1 - \sin^2(u)\right)^n \cos(u)du = \sqrt{n} I_{2n+1} \end{aligned}$$
   (b) $\tan' = 1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$
$$\begin{aligned} J_n &\leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \int_0^{\pi/4} \sqrt{n}\left(1 + \tan^2(u)\right)^{-n} (1 + \tan^2(u))du \\ &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{n}\left(1 + \tan^2(u)\right)^{-(n-1)} du = \int_0^{\pi/4} \sqrt{n}\left(\cos^2(u)\right)^{n-1} du \\ &\leq \int_0^{\pi/2} \cdots = \sqrt{n} I_{2(n-1)} \end{aligned}$$

5. Comme $\sqrt{n} I_{2n+1} = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}} \sqrt{2n+1} I_{2n+1} \; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$,
   et de même $\sqrt{n} I_{2(n-1)} \to \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \simeq 0,886226925453$ et aussi les classiques égalités :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)dt = \sqrt{\pi}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{t^2}{2})dt = \sqrt{2\pi}$$
   Magnifique, tout dépend du comportement locale en 0. Ou, comment utiliser la méthode de de LAPLACE sans le dire.

4 Problème de Géométrie utilisant les nombres complexes

Partie A:

1. $R = \sqrt{2}$

2. $+\pi/2$
3. (OO') est un axe de symétrie de la configuration. C'est aussi l'axe réel, donc $\omega' = \overline{\omega} = 1 - i$.
4. $\widetilde{r}(z) - \omega = i(z - \omega)\ \ldots$
5. (a) Calculer $O'M'$.

   (b) Il suffit de montrer que $\dfrac{Z_{M\vec{M}'}}{Z_{\Omega'\vec{M}}}$ est réel.

   Or, en utilisant le fait que $z\overline{z} = 2$, on a:
$$Z_{M\vec{M}'} \times \overline{Z_{\Omega'\vec{M}'}} = (z' - z)\overline{(z - (1 - i))} = \cdots = 2[z + \overline{z} - 2] \in \mathbb{R}.$$

<u>Partie B</u>:
Remarque: dans cette partie, quitte à changer d'unité, on aurait pu poser $a' = 1$.

1. $\widetilde{r}(z) - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)\ \ldots$
2. $\theta = \pi$, symétrie centrale, $\widetilde{r}(z) = -z + a'$
3. (a) $\omega \in \mathbb{R}$

   (b) $\omega \notin \mathbb{R}$
4. (a) $Z_{\Omega'\vec{M}} = z - \omega' = z - \overline{\omega}$

   (b) $Z_{\Omega'\vec{M}'} = (1 - a/\omega)z + a' - \overline{\omega}$

   (c) $M \neq \Omega'$

   i. $R = OM = O\Omega = |\omega| = O'\Omega = |\omega - a'| = O'\Omega' = |\omega' - a'| = |\overline{\omega} - a'| = O\Omega' = |\omega'|$,
   $O'M' = |z' - a'| = |(1 - a'/\omega)z + a' - \overline{\omega} - a'| = \dfrac{|\omega - a'|}{|\omega|}|z| = \dfrac{R}{R}R = R.$

   ii. $z\overline{z} = |z|^2 = R^2 = |\omega|^2 = \omega\overline{\omega}$
   $(z' - a')\overline{(z' - a')} = \Omega'M'^2 = R^2 = |\omega|^2 = \omega\overline{\omega}$

   iii.
$$\begin{aligned} Z_{\Omega'\vec{M}'} \times \overline{Z_{\Omega'\vec{M}}} &= [(1 - a'/\omega)z + a' - \overline{\omega}] \times [\overline{z} - \omega] \\ &= (1 - a'/\omega)z\overline{z} - (\omega - a')z + (a' - \overline{\omega})\overline{z} - a'\omega + \omega\overline{\omega} \\ &= (\omega - a')\overline{\omega} \times 1 + 2Re((a' - \omega)z) - a'\omega + R^2 \\ &= R^2 - a'(\omega + \overline{\omega}) + 2Re((a' - \omega)z) + R^2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   iv. M, M', Ω' sont alignés.

   (d) Il suffit de montrer que $\dfrac{Z_{\Omega'\vec{M}'}}{Z_{\Omega'\vec{0}}}$ est un nombre imaginaire pur, or:
$$\begin{aligned} Z_{\Omega'\vec{M}'} \times \overline{Z_{\Omega'\vec{O}}} &= [\frac{\omega - a'}{\omega}\omega' + a' - \overline{\omega}] \times \overline{\omega'} = [\frac{\omega - a'}{\omega}\overline{\omega} + a' - \overline{\omega}] \times \omega \\ &= (\omega - a')\overline{\omega} + (a' - \overline{\omega})\omega = 2i \times Im((\omega - a')\overline{\omega}) \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

<u>Partie C</u>:

1. D'après l'énoncé ("recoupe"), il faut comprendre que $M \neq \Omega' \neq M'$.

   Soit $\mathcal{R}$ la rotation de centre Ω qui envoie $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$. Notons $M'' = \mathcal{R}(M)$. D'après la partie B, on a $M'' \in \Delta \cap \mathcal{C}'$, donc $M'' = M'$ ou Ω'. Pour conclure, il suffit de montrer que $M'' \neq \Omega'$.

   Or si $M'' = \Omega'$ alors $M = \mathcal{R}^{-1}(\Omega')$. Or $\mathcal{R}^{-1}$ est la rotation de centre Ω qui envoie $\mathcal{C}'$ sur $\mathcal{C}$. En appliquant le résultat de la partie B à $\mathcal{R}^{-1}$, i.e. en intervertissant le rôle de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, on en déduit que Δ est tangente à $\mathcal{C}'$. Ce qui contredit l'énoncé: "Δ recoupe $\mathcal{C}'$ ". On a donc bien montrer que $M'' \neq \Omega'$.

2. (a) A vos règle et compas.
   (b) On place Ω', le symétrique de Ω par rapport à (AB). on trace le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon ΩA et le cercle $\mathcal{C}'$ de centre A' et de rayon ΩA. On trace la demi-droite $[AB)$ qui intersecte le cercle $\mathcal{C}$ en C. Deux cas se présentent:
      - Si $C \neq \Omega'$, on trace la droite $(C\Omega')$. L'intersection de cette droite et du cercle $\mathcal{C}'$ nous donne C'.
      - Si $C = \Omega'$, on trace la tangente au cercle $\mathcal{C}$ en Ω'. L'intersection de cette droite et du cercle $\mathcal{C}'$ nous donne C'.

      Ayant obtenu C', on trace la demi-droite $[A'C')$. L'intersection de cette demi-droite avec le cercle de centre A' et de rayon AB nous fournit B'.