EXERCICE 4

On note P le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On note P^* le plan P privé de l'origine O et $\mathbf{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls. À tout point M du plan P de coordonnées (x, y), on associe son affixe $z = x + \mathrm{i}\,y$.

On note f l'application de $\mathbf{C}^*$ dans $\mathbf{C}^*$ qui à tout nombre complexe z associe le complexe z' défini par $z' = f(z) = \dfrac{\mathrm{k}}{\overline{z}}$, où k est un nombre réel non nul.

On note I l'application de P^* dans P^* qui à tout point M d'affixe z associe le point M' $= I$ (M) d'affixe $z' = f(z) = \dfrac{\mathrm{k}}{\overline{z}}$.

L'application I est appelée inversion de centre O et de puissance k.

Un cercle (ou une droite) passant par le point O, mais privé(e) du point O, sera par la suite également dénommé(e) cercle (respectivement droite).

I. Quelques généralités.

1. Exprimer la longueur OM' en fonction de la longueur OM.
2. Montrer que les points O, M et M' sont alignés et que le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM'}}$ est égal à k.
3. Déterminer, en fonction du nombre réel non nul k, la nature de l'ensemble des points M de P^* invariants par l'application I.
4. Vérifier que l'inversion I est involutive, c'est-à-dire que $I \circ I = Id$, où Id est l'application identité du plan.
5. Déterminer l'image par l'application I du cercle de centre O et de rayon $r > 0$.

II. Image par l'inversion *I* d'un cercle passant par le point O.

Soit C un cercle de centre Ω (d'affixe $\omega \neq 0$) et de rayon $r > 0$, passant par le point O.

On note H le point du cercle C diamétralement opposé au point O.

On note H' l'image du point H par l'inversion I et on note D la droite passant par le point H' orthogonale à la droite (OH).

Soit M un point du cercle C différent du point O et du point H.

Soit N le point d'intersection des droites (OM) et D.

1. On suppose $\mathrm{k} < 0$.
   a. Cas particulier.
      Faire une figure faisant apparaître le cercle C, les points H, H', M, N ainsi que la droite D, dans le cas particulier où $\omega = 4 + 3\mathrm{i}$ et $\mathrm{k} = -30$.
   b. Cas général avec $\mathrm{k} < 0$.
      i. Justifier que les triangles OMH et OH'N sont semblables.