Probabilités **P**our le **C**APES de **M**athématiques

1 Univers fini et probabilités discrètes

2 Probabilités conditionnelles

3 Variables aléatoires finies

4 Variables aléatoires à densités

Historiquement, les variables aléatoires à densités sont apparues comme approximations de variables aléatoires finies : approximation de la loi binomiale par la loi normale. Mais elles ont leur intért propre pour étudier des quantités continues.

Définition 1 (Variable aléatoire à densité)
Soit X une variable aléatoire réelle. On dit que X est une variable aléatoire à densité s'il existe une fonction f_X, appelée densité de X, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$ on a :

$$P(a \leq X \leq b) = P_X([a,b]) = \int_a^b f_X(x)dx.$$

Ainsi X est une variable aléatoire à densité si l'on peut calculer sa loi à l'aide d'intégrales.

Comme une probabilité est toujours positive on en déduit qu'au point de continuité de f_X, f_X est positive ou nulle. Les valeurs de f_X en ses points de discontinuité n'interviennent pas dans le calcul des intégrales de f_X sur les segments de $\mathbb{R}$. En pratique on peut donc supposer que f_X est postive sur $\mathbb{R}$. Comme une probabilité est toujours majorée par 1 on en déduit que nécessairement, l'intégrale de la fonction positive f_X sur tout $\mathbb{R}$ est convergente. Cette intégrale impropre est mme égale à 1 car $P(X \in \mathbb{R}) = 1$.

Si $a = b$, $\displaystyle\int_a^a f_X(x)dx = 0$, donc la probabilité que X soit égale à un nombre quelconque fixé à l'avance est nulle ! Ainsi, la touche "random" de votre calulatrice simule la loi à densité uniforme sur $[0, 1]$ que l'on va étudier précisément dans la suite de cette section. Ainsi la touche "random" sort un nombre *au hasard* compris entre 0 et 1. On se fixe d'abord, un nombre entre 0 et 1, celui que vous voulez, par exemple $a = \dfrac{1}{2}$. Je vous mets au défi d'obtenir *exactement* $\frac{1}{2}$ en appuyant sur votre touche "random" autant de fois que vous voulez.

<u>Exercice</u> : Relevez le défi.

Ainsi, une variable aléatoire à densité à un comportement trés différent d'une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs. Une variable aléatoire à densité prend nécessairement un continum de valeurs réelles.

On a donc les propriétés suivantes :

Propriétés 1 (des densités)
Soit X une variable aléatoire réelle admettant la densité f_X. On note F_X sa fonction de répartition, $F_X(x) := P(X \leq x)$. On a les propriétés suivantes :

1. *f_X est positive ou nulle (en ses points de continuité) sur $\mathbb{R}$ et* $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$,
2. *pour tout $a \in \mathbb{R}$, $P(X = a) = 0$,*
3. *pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$,*
4. $F_X(x) := P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$,
5. *Si x est un point de continuité de f_X alors F_X est dérivable en x est $F_X'(x) = f_X(x)$,*
6. *unicité de la densité : si g est aussi une de densité de X alors* $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_X(x) - g(x)|dx = 0$,

Exercice : Démontrez les résultats précédents.

Théorème 1 (Espérance et formule de transfert)
Soit X une variable aléatoire réelle. admettant la densité f_X, et soit $\varphi \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, Si $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| f_X(x)dx$ converge alors la variable aléatoire $\varphi(X)$ admet une espérance et

$$E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_X(x)dx.$$

Question : $Y := \varphi(X)$ est-elle une variable aléatoire à densité ? (Regardez le cas où φ est l'identité, ou une fonction affine non constante, ou une fonction constante ou un difféomorphisme sur son image).

Ce théorème admis est trés important, voici quelques applications.

- Si $\varphi(x) \equiv x$, la densité nous fournit un moyen de calculer $E(X)$ si X admet une espérance :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx.$$

- Si f_X admet un moment d'ordre 2, alors X posséde une espérance et une variance :

$$Var(X) := E([X - E(X)]^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx - E(X)^2.$$

  Appliquez la formule de transfert à $\varphi(x) \equiv (x - \mu)^2$ où $\mu := E(X)$.
- Méthode de la fonction test : $X \sim Y$ si et seulement si pour toute fonction φ continue et bornée sur $\mathbb{R}$, $E(\varphi(X)) = E(\varphi(Y))$.

Les exemples suivants de lois à densité sur $\mathbb{R}$ sont proposés sous forme d'exercices.

4.1 Loi uniforme

Nous allons retrouver la loi simulée par la touche "random" de votre calculatrice. Cette loi est fondamentale pour la simulation d'expérience aléatoire (déjà au programme de la seconde). En effet, à l'aide de cette loi on peut **simuler toute les lois de probabilités**.

Définition 2 ($\mathcal{U}(J)$)
Soit J un intervalle borné de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, et U une variable aléatoire réelle. On dit que U suit la loi uniforme sur J si :

1. $P(U \in J) = 1$,

2. *Pour chaque sous-intervalle I de J, $P(X \in I)$ est proportionnelle à la longueur de l'intervalle I.*

1. Montrez que que U admet la densité $f_U(u) := \frac{1}{|J|}\chi_J(u)$, où $|J|$ représente la longueur de l'intervalle J.
2. Si $A < B$, expliquez pourquoi $\mathcal{U}([A,B]) = \mathcal{U}(]A,B]) = \mathcal{U}([A,B[) = \mathcal{U}(]A,B[)$.
   En déduire que vous avez quasiment aucune chance d'obtenir 0 ou 1 en appuyant sur la touche "random" de votre calculatrice.
3. Tracez le graphe de la fonction de répartition de la loi uniforme sur $]0,1[$ puis sur $]A,B[$ avec $A < B$.
4. Si $a < b$, montrez que : $U \sim \mathcal{U}(]0,1[)$ si et seulement si $a + (b-a)U \sim \mathcal{U}(]a,b[)$.
   A l'aide de votre calculatrice simulez la loi uniforme sur $]0,2[$, ou $]-1,1[$.
5. Si $U \sim \mathcal{U}(]0,1[)$, vérifiez que $E(U) = \frac{1}{2}$ et $\sigma(U) = \frac{1}{\sqrt{12}}$.
   Vérifiez ces résultats en simulant 100 copies indépendantes de U à l'aide de votre calculatrice.
6. Soit $\Omega := [0,1]$, muni de la tribu des boréliens et de la mesure usuelle : la probabilté d'un intervalle est égale à sa longueur. Calculez la loi des variable aléatoire suivante défini pour chaque $\omega \in [0,1]$:
   $X_1(\omega) = \omega$, $X_2(\omega) = 1-\omega$, $X_3(\omega) = 1 - 2|\omega - 1/2|$, $X_4(\omega) = \chi_{[0,1/2[}(\omega)X_3(2\omega) + \chi_{[1/2,1[}(\omega)X_3(2\omega-1)$, ...
   On pourra calculer leur fonction de répartition.
7. On note $[x]$ la partie entière de x. Si $U \sim \mathcal{U}(]0,1[)$, montrez que $D := 1 + [6U]$ est la loi associée au lancer d'un dé parfait.
8. Si $U \sim \mathcal{U}(]0,1[)$,on peut écrire le développement décimale de U en base 10 :
   $$U := \sum_{n=1}^{+\infty} U_n 10^{-n}.$$
   Montrez que que U_n suit la loi uniforme sur $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ et que $(U_n)_n$ forme une suite de variables aléatoires indépendantes.
   On calculera d'abord la loi de U_1 et U_2, puis on vérifiera l'indépendance de U_1 et U_2. Pour simplifier, on pourrait aussi étudier le développement de U en base 2.
   Application : un appel de la fonction "random" de la calculatrice simule dix lancers d'un dé à dix faces, ou 10 tirages indépendants de chiffres.

4.2 Loi exponentielle

Définition 3 ($\mathcal{E}(\lambda)$,)
Soit $\lambda > 0$, $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, i.e. X est une variable aléatoire à densité qui suit une loi exponentielle de paramétre λ si $f_X(x) = \chi_{]0,+\infty[}(x) \times \lambda \exp(-\lambda x)$.

1. Calculez la fonction de répartition de X : $F_X(x) := P(X \leq x)$.
2. Soit $t, s > 0$. Montrez que $P(X > t + s / X > t) = P(X > s)$. En déduire que X modélise un processus sans mémoire.
3. Soit $h > 0$ et G la variable aléatoire discrète défini par $G = n+1$ quand $nh < X < (n+1)h$, pour $n \in \mathbb{N}$. Déterminez la loi de G. En redéduire une interprétation de la loi exponentielle en terme de temps d'attente.

4. Calculez l'espérance, l'écart type et la médiane de X.
5. Montrez que si U suit la loi uniforme sur $]0,1[$ alors $-\dfrac{\ln(1-U)}{\lambda} \sim \mathcal{E}(\lambda)$.
6. Simulez le temps de vie d'une ampoule dont l'espérance de vie est de $1000h$ à l'aide de votre calculatrice.
7. Si X et Y, deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi exponentielle de paramètre λ. Calculez la loi de $U := \min(X, Y)$. Interprétez le résultat trouvé en terme de temps d'attente.
8. A Nice, la promenade des anglais qui longe la baie des anges est éclairée toutes les nuits par plus de 1000 ampoules. Ces ampoules ont une espérance de vie d'un an. Vous passez un soir sur la promenade et vous vous demandez qu'elle est la probabilité qu'au moins un lampadaire soit éteint.

4.2.1 Indications

1. *$F_X(x) = P(X \leq x) = \chi_{]0,+\infty[}(x) \times (1 - \exp(-\lambda x))$.*
2. *$P(X > t + s/X > t) = P(X > s)$. Soit $\psi(x) = 1 - F_X(x) = \chi_{]0,+\infty[}(x) \times \exp(-\lambda x)$, Pour $s, t > 0$, $\psi(s+t) = \psi(s)\psi(t)$. (par exemple temps de vie d'un individu qui vit dangeureusement, donc qui n'a pas le temps de viellir, ou temps de vie d'un amortel).*
3. *$h > 0$, $G = 1 + \left[\dfrac{X}{h}\right]$. $n \geq 1, P(G = n) = q^{n-1}p; p := 1 - \exp(-\lambda h))$, car :*
   $P(G = n) = P((n-1)h < X < nh) = \displaystyle\int_{(n-1)h}^{nh} \lambda \exp(-\lambda x))dx = \exp(-(n-1)\lambda h))(1 - \exp(-\lambda h))$;
   $hG_h \to X$. $E(G_h) = 1/p \sim 1/(\lambda h))$. $G \sim \mathcal{G}(h/\lambda)$, la loi géométrique de paramètre h/λ qui est bien connu pour tre sans mémoire.
4. *$E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$, $\sigma_X = \dfrac{1}{\lambda}$, médiane de $X = \dfrac{\ln(2)}{\lambda}$.*
5. *$Y = -\dfrac{\ln(1-U)}{\lambda} \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Méthode de la fonction test ou calcul de F_Y.*
6. *On tape à sa calculatrice $-10^{-3}\ln(1 - random)$ et on tape plusieurs fois sur EXE.*
7. *$U := \min(X, Y) \sim \mathcal{E}(2\lambda)$, avec $1 - F$. On attend deux fois moins en moyenne.*

Références

[1] Vous trouverez les programmes du secondaires ainsi que de nombreux documents d'accompagnement sur le site http ://www.cndp.fr

[2] Livres du secondaires de Première et Terminale S et ES pour les probabilités, et de la Quatrième à la Terminale pour les statistiques

[3] Cottrell, Exercices de probabilités pour la Licence, Belin.

[4] William Feller, Introduction to probability theory and its applications, Volume I, third ed., Wiley, 1964.

[5] William Feller, Introduction to probability theory and its applications, Volume II, second ed., Wiley, 1970.

[6] Dominique Foata & Aimé Fuchs, Calcul des probabilités, Masson, 1996.

[7] Bernard Lanuzel, CAPES de Mathématiques, Probabilités et Statistiques, cours et exercices corrigés, Dunod, 1999.

[8] C. Leboeuf, J-L. Roque, J. Guéguand, Cours de probabilités et statistiques, Ellipses, 1997.

[9] R. Mazliak, Exercices de probabilités pour le CAPES.

[10] Michel Métivier, Probabilités : dix leons d'introduction, ellipses, 1987.