Master 2 Enseignement
T. Champion & S. Junca

Partiel de Probabilités

Jeudi 14 Ocobre 2010, 14h-16h30

1 Un jeu d'argent à répartition équilibrée

Un jeu d'argent oppose deux joueurs. On note R_i^n le capital du joueur numéro $i \in \{1,2\}$ au bout de n parties. La somme totale engagée dans le jeu en début de partie est la constante $m = R_1^0 + R_2^0$. À chaque partie, le joueur i à une probabilité fixe p_{ij} de remporter la partie contre le joueur $j \neq i$. Le résultat de la partie numéro n est modélisé par une variable aléatoire de Bernoulli: $S_{ij}^n \sim \mathbb{B}(p_{ij})$ qui vaut 1 si i gagne contre j, et, qui vaut 0 sinon. Après chaque partie, le capital est réparti de la manière suivante pour $i, j \in \{1,2\}$, $i \neq j$, $n \geq 1$:

$$R_i^n \quad = \quad R_i^{n-1} + K(S_{ij}^n - s(R_i^{n-1} - R_j^{n-1})), \tag{1}$$

avec les notations et hypothèses suivantes

- $s(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{L}$,
- $0 < K$, $0 < L$, $2K < L$,
- Pour $i \neq j$ fixés, $(S_{ij}^n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoire indépendantes.

Le but de l'exercice est d'étudier l'évolution du capital de chaque joueur, i.e. des variables aléatoires $(R_i^n)_{n \geq 1}$ pour $i = 1, 2$.

1. Calculer $p_{ij} + p_{ji}$ et $S_{ij}^n + S_{ji}^n$ pour $n \geq 1$, $i, j \in \{1,2\}$, $i \neq j$.
2. En déduire que pour tout n, $R_1^n + R_2^n = m$.
3. Calculer la loi, l'espérance et la variance de R_1^1, puis de R_2^1.
4. On pose $D^n = R_1^n - R_2^n$, $r = (1 - 2\frac{K}{L})$ et $B^n = K(2S_{12}^n - 1)$, montrer que :
$$D^n \quad = \quad rD^{n-1} + B^n, \qquad\qquad n \geq 1.$$
5. Trouver la loi, l'espérance et la variance de B^n pour $n \geq 1$.
6. Calculer $\mathbb{E}(D^n)$ en fonction de n. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(D^n) = L\left(p_{12} - \dfrac{1}{2}\right)$.
7. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(R_i^n)$ pour $i = 1, 2$.
8. De même, calculer $Var(D^n)$ puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} Var(D^n) = \dfrac{KLp_{12}p_{21}}{1 - \frac{K}{L}}$.
9. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} Var(R_i^n)$ pour $i = 1, 2$.
10. Expliquez pourquoi la répartition des gains de ce jeu est dite équilibrée.

2 Tirages

On considère deux urnes:

- une urne verte qui contient 1 boule rouge et 3 boules vertes;
- une urne rouge qui contient 2 boules rouges et 2 boules vertes.

On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la façon suivante:

- le premier tirage est effectué dans l'urne verte;
- à partir du second tirage, le tirage est effectué dans l'urne dont la couleur est celle de la boule obtenue au tirage précédent.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on note V_n (respectivement R_n) l'évènement *"on obtient une boule verte au n-ième tirage"* (resp. *"on obtient une boule rouge au n-ième tirage"*) et v_n (respectivement r_n) la probabilité de V_n (resp. R_n).

1. **Les deux premiers tirages**.
   (a) Quelle est la probabilité de l'évènement *"on obtient une boule verte au* 2*-ième tirage"*?;
   (b) Si on a obtenu une boule verte au second tirage, quelle est la probabilité que ce tirage ait été effectué dans l'urne rouge?
2. **Les trois premiers tirages**. Déterminer la probabilité des évènements
   (a) *"on obtient une boule verte au* 3*-ième tirage"*;
   (b) *"on obtient au moins une boule verte dans les trois premiers tirages"*;
   (c) *"on obtient exactement une boule rouge dans les trois premiers tirages"*.
3. **Le n-ième tirage**.
   (a) Déterminer v_{n+1} en fonction de v_n et r_n.
   (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
4. **Première boule rouge**. Soit X la v.a. égale au rang d'apparition de la première boule rouge
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de X.
5. **Première boule verte**. Soit Y la v.a. égale au rang d'apparition de la première boule verte
   (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Calculer l'espérance de Y.