Indications pour le sujet de Partiel Elo & tirage.

I) Un jeu d'argent à répartition équilibrée

1. La somme fait toujours 1.
2. ajouter et simplifier avec s(x) + s(-x)= 1 on a
$R_i^n+R_j^n=R_i^{n-1}+R_j^{n-1}+K(1-1)=R_i^{n-1}+R_j^{n-1}=...=m.$.
3. Image affine d'une Bernoulli, donc chaque v.a. ne prennent que deux valeurs.
$R_i^1=K\,S_{ij}^1+c_i$ avec $c_i=R_i^0-K\,s(R_i^0-R_j^0),\ i\neq j.$
$P(R_i^1=K+c_i)=p_{ij}$ et $P(R_i^1=c_i)=1-p_{ij}=p_{ji}$

$E(R_i^1)=K\,E(S_{ij}^1)+c_i=K\,p_{ij}+c_{i.}$
$Var(R_i^1)=K^2\,Var(S_{ij}^1)=K^2\,p_{ij}\,p_{ji}.$

4. $$D^n=R_1^n-R_2^n=R_1^{n-1}+K(S_{12}^n-s(D^{n-1}))-\left(R_2^{n-1}+K(S_{21}^n-s(-D^{n-1}))\right)$$
$$=D^{n-1}+K(2S_{12}^n-1)-2K/L\,D^{n-1}\ \text{car}\ S_{12}^n-S_{21}^n=2S_{12}^n-1\ \text{et}\ s(x)-s(-x)=2x/L.$$

5. On a encore l'image affine d'une loi de Bernoulli qui vaut -K ou K.
$E(B^n)=K\,E(2S_{12}^n-1)=K(2p_{12}-1)=K(p_{12}-p_{21}).$
$Var(B^n)=4K^2\,Var(S_{12}^n)=4K^2\,p_{12}\,p_{21}.$
6. Suite arithmético-géométrique
$d^n=E(D^n),\ d^n=r\,d^{n-1}+K(p_{12}-p_{21}),$
$$d^\infty=\frac{K(p_{12}-p_{21})}{1-r}=L\frac{p_{12}-p_{21}}{2}=L\left(p_{12}-\frac{1}{2}\right)$$
$d^n=d^\infty+r^n(d^0-d^\infty)\to d^\infty$ car $0<r<1.$
7. $R_1^n+R_2^n=m,\ R_1^n-R_2^n=D^n,$ ainsi on a $2R_1^n=m+D^n$ et $2R_2^n=m-D^n.$
On peut donc passer à la limite et on a:
$$\lim\ E(R_i^n)=\frac{m}{2}+L\frac{p_{ij}-p_{ji}}{4}=\frac{m}{2}+\frac{L}{2}\left(p_{ij}-\frac{1}{2}\right),\ i\neq j.$$
8. De la relation de récurrence sur D^n on en déduit la relation de récurrence sur la variance: $$v^n=Var(D^n)=r^2\,v^{n-1}+4K^2\,p_{12}\,p_{21}\to v^\infty=\frac{4K^2\,p_{12}\,p_{21}}{1-r^2}=\frac{KL\,p_{12}\,p_{21}}{1-\frac{K}{L}}$$
9. $Var(R_i^n)\to\dfrac{v^\infty}{4}$
10. La répartition des gains s'équilibre vers une répartition proportionnelle à l'écart des chances de gagner de chaque joueur.
En effet, si les deux joueurs sont de même force,
leur espérance limite de gain et la moitié de la somme totale pour chaque joueur ce qui est équitable.
En revanche si un joueur est plus fort que l'autre, il gagnera en plus de la moitié de la somme totale mise en jeu un bonus proportionnel à son avantage par rapport à l'autre joueur: sa probabilité de gagner – 50% ou la différence des probabilités. L'autre joueur aura un malus qui sera exactement l'opposé du bonus de son adversaire.
Noter aussi que le plus fort ne ramassera pas toute la somme mise en jeu (sauf dans le cas extrême où il a 100% de chances de gagner).

II) Tirages

Il est fortement conseiller de faire un arbre.

Pour aller plus loin: c'est un exemple de chaîne de Markov à deux états: V & R.

$$(\to \tfrac{3}{4} \leftarrow)\quad V \underset{\leftarrow \frac{1}{2} \leftarrow}{\overset{\to \frac{1}{4} \to}{\qquad}} R \quad (\to \tfrac{1}{2} \leftarrow)$$

notons $m_n=(v_n, r_n)$, $v_n+r_n=1$, $m_0=(1,0)$, la mesure invariante est $m_\infty=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$

$$M=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\qquad m_{n+1}=m_n M\ ,\ m_1=\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right),\ m_2=\left(\frac{11}{16},\frac{5}{16}\right),\ m_3=\left(\frac{43}{64},\frac{21}{64}\right).$$

1. a) $v_2=\frac{11}{16}=0{,}687....$

   b) $P_{V_2}(R_1)=\frac{P(R_1\cap V_2)}{P(V_2)}=\frac{1/4\times 1/2}{11/16}=\frac{2}{11}=0{,}18...$

2. a) $v_3=\frac{43}{64}=0{,}67...$

   b) $1-P(RRR)=1-\frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{15}{16}\approx 0.94$

   c) $P(\{RVV, VRV, VVR\})=\frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{4}=\frac{21}{64}\approx 0.33.$

3. a) $v_{n+1}=\frac{3}{4}v_n+\frac{1}{2}r_n$. Formule des probabilités totales.

   b) $v_{n+1}=\frac{3}{4}v_n+\frac{1}{2}(1-v_n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}v_n,\ v_\infty=\frac{2}{3},\ \ v_n=v_\infty+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n.$

4. a) $P(X=n)=P(V...VR)=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\frac{1}{4}.$ C'est une loi géométrique de paramètre p = ¼.

   C'est normal puisqu'on reste toujours à faire des tirage dans l'urne verte.

   b) $E(X)=\frac{1}{p}=4,\ Var(X)=\frac{q}{p^2}=12.$

5. a) $P(Y=1)=\frac{3}{4}$, pour n > 1 : $P(Y=n)=P(R...RV)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ et

   $P(Y=+\infty)=0$ Ce n'est pas une loi géométrique (on change d'urne).

   b) On rappelle que pour |x| < 1: $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+....,\ \frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+...$

   $$E(Y)=1\times\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n}{2^{n-1}}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1-1/2)^2}-1\right)=2\frac{3}{4}=\frac{3}{2}=1{,}5.$$

   Autre Solution avec l'espérance conditionnelle et la loi Géométrique décalée:
   E(Y)= ¾ * 1 + ¼ *[1/(½) +(1)] = ¾ * 1 + ¼ * 3 = 1.5.