

## EXERCICE 22

Un groupe industriel possède deux filiales MAT et MATIC qui produisent des petits moteurs destinés au montage de jouets.

– Partie I –

La variable aléatoire  $X$  qui, à chaque moteur tiré au hasard dans la production, associe sa durée de vie moyenne exprimée en heures, suit la loi normale de moyenne 400 et d'écart type 40.

- Un moteur est déclaré non commercialisable si sa durée de vie est inférieure à 318 heures. Calculer, à  $10^{-2}$  près la probabilité  $p$  qu'un moteur prélevé au hasard dans la production ne soit pas commercialisable.
- On admet que  $p = 0,02$ . Soit  $Y$  la variable aléatoire qui, à tout lot de 50 moteurs, associe le nombre de moteurs non commercialisables. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler le prélèvement de 50 moteurs à un prélèvement aléatoire avec remise.
  - Quelle est la loi suivie par  $Y$  ? Justifier la réponse et donner ses paramètres.
  - Calculer à  $10^{-3}$  près la probabilité de l'événement : « il y a au plus trois moteurs non commercialisables ».

– Partie II –

La filiale MAT prélève un échantillon de taille 100 sur la production d'un jour et mesure la durée de vie, en heures, des moteurs. Les résultats obtenus sont les suivants :

durée de vie	[300,340[	[340,380[	[380,420[	[420,460[	[460,500[
effectifs	7	21	48	16	8

- En faisant l'hypothèse que les valeurs mesurées sont celles du centre de classe, calculer, à  $10^{-2}$  près, la moyenne  $m_1$  et l'écart type  $\sigma_1$  de cette série statistique.

La filiale MATIC, dans des conditions similaires, contrôle un échantillon de taille 100 et obtient pour résultats  $m_2 = 406,8$  et  $\sigma_2 = 40,5$ .

- On désigne par  $\bar{X}_1$  la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 moteurs prélevés au hasard par la filiale MAT, associe sa moyenne, et par  $\bar{X}_2$  la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 moteurs prélevés au hasard par la filiale MATIC, associe sa moyenne.

Tous les échantillons considérés sont assimilés à des échantillons prélevés avec remise.

On suppose que les variables aléatoires  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, D = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$  suivent des lois normales de moyennes respectives  $M_1, M_2, M_1 - M_2$  inconnues, et on estime l'écart type de  $D$  par

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{100}}$$

(On prend comme valeur approchée à  $10^{-1}$  près de  $\sigma_1$  la valeur 39,4.)

On décide de construire un test bilatéral permettant de savoir s'il existe une différence significative au seuil de 5% entre les durées de vie des moteurs fabriqués par les filiales MAT et MATIC.

On choisit pour hypothèse  $H_0 : M_1 = M_2$ , et pour hypothèse alternative  $H_1 : M_1 \neq M_2$ .

- Sous l'hypothèse  $H_0$ ,  $D$  suit la loi normale  $N(0, \sigma_D)$ . Déterminer l'intervalle  $[-h, h]$  tel que  $P(-h \leq D \leq h) = 0,95$ .
- Énoncer la règle de décision du test.
- Utiliser ce test avec les deux échantillons de l'énoncé et conclure.