

Conditionnements

Soit $\|\cdot\|$ une norme de \mathbb{R}^N , $\|\cdot\|$ sa norme subordonnée, $cond(A) := \|\|A\|\| \times \|\|A^{-1}\|\|$ pour $A \in GL_N(\mathbb{R})$. Pour la norme euclidienne, le conditionnement de A est noté $cond_2(A)$. $Sp(A)$ est le spectre de A .

1 Conditionnement d'un système linéaire

1. Montrer que $cond(A) \geq 1$, $cond(\alpha A) = cond(A)$ pour tout $\alpha \neq 0$ et $cond(AB) \leq cond(A)cond(B)$.
2. Si $Ax = b$ et $Ay = c$, en notant $\Delta x = y - x$, $\Delta b = c - b$, montrer que : $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq cond(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$.
3. Faire de même, si $Ax = b$ et $By = b$, $\Delta x = y - x$, $\Delta A = B - A$: $\frac{\|\Delta x\|}{\|y\|} \leq cond(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$.
4. Si $A = {}^t A > 0$ vérifier que $cond_2(A) = \frac{\lambda_N}{\lambda_1}$ où $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N \in Sp(A)$.
5. Montrer que $cond_2(A) = 1$ si et seulement si A est proportionnelle à une matrice orthogonale.
6. Vérifier que $cond_2(A)$ est invariant par changement de base orthonormale.

2 Coefficient de Rayleigh

Pour $x \neq 0$, le coefficient de Rayleigh est défini avec le produit scalaire par : $R(x) = \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle}$..

Démontrer pour A une matrice symétrique réelle, avec $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N \in Sp(A)$. que :

1. $\max_{0 \neq x} R(x) = \lambda_N$, $\min_{0 \neq x} R(x) = \lambda_1$, $cond_2(A) = \frac{\sup |R|}{\inf |R|}$.
(utiliser une base de vecteurs propres de A)
2. $\min_{\dim V=k} \max_{0 \neq x \in V} R(x) = \lambda_k$, $\max_{\dim V=k} \min_{0 \neq x \in V} R(x) = \lambda_{N-k+1}$, pour $1 \leq k \leq N$.

3 Stabilité des valeurs propres d'une matrice diagonalisable

Soit A une matrice diagonalisable et P une de ses matrices de passage : $P^{-1}AP = D$ avec D diagonale. On suppose que pour toute matrice diagonale Λ , $\|\|\Lambda\|\| = \rho(\Lambda) = \max_i |\Lambda_{ii}|$.

1. Vérifier que si $\det(I + M) = 0$ alors $\|\|M\|\| \geq 1$ où I désigne la matrice de l'identité.
2. Soit $B = A + \Delta A$ et $\mu \in Sp(B)$.
Si $\mu \notin Sp(A)$, vérifier que $P^{-1}(B - \mu I)P = (D - \mu I)(I + (D - \mu I)^{-1}P^{-1}\Delta AP)$.
3. En déduire que $d(Sp(A + \Delta A), Sp(A)) = \max_{\mu \in Sp(A + \Delta A)} \min_{\lambda \in Sp(A)} |\mu - \lambda| \leq cond_2(P) \|\|\Delta A\|\|_2$.
4. En déduire que $d(Sp(A + \Delta A), Sp(A)) \leq \Lambda \|\|\Delta A\|\|_2$ avec $\Lambda := \inf_{P, P^{-1}AP=D} cond_2(P)$,
puis que la recherche des valeurs propres des matrices normales est un problème très bien posé.

Références : Ciarlet : Introduction à l'analyse numérique matricielle ...

Lascaux & Théodor : Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur.

Schatzman : Analyse numérique