M-estimateurs à contraste régulier et heuristique de pente en sélection de modèles

Adrien Saumard, Université de Rennes 1

En apprentissage statistique, la cible d'estimation peut souvent se définir comme le minimiseur d'un critère moyenné selon une loi inconnue P, appelé risque. Citons entre autres la régression par moindres carrés, l'estimation de la densité par maximum de vraisemblance ou par moindres carrés, la classification binaire et bon nombre de procédures de classification non-supervisée comme le k-means et l'estimation de paramètres d'un mélange. Se donnant un échantillon de n données de loi P et une collection de modèles, le statisticien va naturellement chercher à sélectionner l'estimateur de risque minimal parmi les estimateurs contruits sur chaque modèle, appelé *oracle.* Or ce risque est une quantité inconnue car il dépend de la loi des données. Une idée naturelle, présente dans les travaux pionniers d'Akaike [1], [2] et mise en avant par Mallows [6] est d'estimer le risque de chaque estimateur *sans biais*, en pénalisant le risque empirique, c'est-à-dire en ajoutant une quantité positive au critère moyenné selon la loi empirique P_n de l'échantillon.

Comme nous le verrons, les procédures de sélection de modèles sont sensibles au choix des constantes dans les pénalités, choix qui se révèle souvent peu fondé en pratique, une sous-pénalisation pouvant dégrader considérablement la performance de l'algorithme associé. Birgé et Massart [4] ont ainsi récemment introduit une méthode de calibration automatique des pénalités, appelée *heuristique de pente,* dont le but intrinsèque - contrairement à d'autres méthodes de calibration - est d'améliorer la performance en prédiction des algorithmes. Cette méthode se base en pratique sur un saut (identifiable) dans les dimensions des modèles sélectionnés, ce saut étant localisé autour d'un certain seuil de pénalisation appelé pénalité minimale. L'heuristique stipule alors que la pénalité optimale, qui sélectionne un estimateur dont le risque est équivalent à celui de l'oracle, vaut deux fois la pénalité minimale.

Le but de l'exposé est de valider cette heuristique et de montrer l'optimalité non-asymptotique de l'estimateur sélectionné dans un cadre générique nouveau que nous définirons et que nous appellerons «M-estimation à contraste régulier». Dans ce cadre, nous retrouverons et généraliserons certains résultats de Arlot et Massart [3], et Lerasle [5]. Nous validerons aussi pour la première fois l'heuristique de pente pour un risque non quadratique, dans le cas de l'estimation de la densité par maximum de vraisemblance. Enfin, nous aborderons le problème encore quasiment vierge des bornes inférieures de l'excès de risque en probabilité pour des M-estimateurs, et nous en donnerons une solution optimale au premier ordre dans le cas des M-estimateurs à contraste régulier.

References

[1] H. Akaike. Statistical predictor identification. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 22:203–217, 1970.

[2] H. Akaike. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. In *Second International Symposium on Information Theory (Tsahkadsor, 1971)*, pages 267–281. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973.

[3] Sylvain Arlot and Pascal Massart. Data-driven calibration of penalties for least-squares regression. *J. Mach. Learn. Res.*, 10:245–279 (electronic), 2009.

[4] Lucien Birgé and Pascal Massart. Minimal penalties for Gaussian model selection. *Probab. Theory Related Fields*, 138(1-2):33–73, 2007.

[5] Matthieu Lerasle. Optimal model selection in density estimation, 2009. arXiv:0910.1654.

[6] Colin L. Mallows. Some comments on C_p. *Technometrics*, 15:661–675, 1973.