**Introduction à la théorie algébrique des systèmes différentiels**

A trois variables, considérons les solutions $f$ du système différentiel linéaire :

$$\frac{\partial f}{\partial X_1} = X_1 \frac{\partial f}{\partial X_2} + X_2 \frac{\partial f}{\partial X_3} = 0$$

Nous avons alors :

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial X_1} - \frac{\partial}{\partial X_1}(X_1 \frac{\partial f}{\partial X_2} + X_2 \frac{\partial f}{\partial X_3}) = 0$$

d'où nous déduisons :

$$\frac{\partial f}{\partial X_2} = 0$$

puis, par le même principe :

$$\frac{\partial f}{\partial X_3} = 0$$

Ainsi, $f$ est naturellement solution d'une famille beaucoup plus grande d'équations différentiels linéaires :

$$\sum_{i=1}^{3} A_i \frac{\partial}{\partial X_i}$$

où les $A_i$ sont des opérateurs différentiels linéaires arbitraires.

D'une façon générale, nous montrerons comment associer à un système d'équations différentiels linéaires un objet algébrique appelé $\mathcal{D}$ Module. Nous définirons les variétés caractéristiques des $\mathcal{D}$ Modules, ainsi que les $\mathcal{D}$ Modules holonomes. Dans ce cadre, des opérations naturelles sur les $\mathcal{D}$ Modules sont définies : image directe, image inverse, produit, microlocalisations, ... . Tout cela donne des moyens d'études des systèmes différentiels; les résultats obtenus assurent largement la pertinence de la méthode.

Intéressons nous aux solutions analytiques complexes, locales au vosisinage point, d'un système d'équations différentiels linéaires correspondant à un $\mathcal{D}$ Module. Si les équations sont homogènes, ces solutions forment un espace vectoriel. En faisant varier le point, nous définissons ainsi une famille d'espaces vectoriels. Un théoréme de Kashiwara montre que si le $\mathcal{D}$ Module est holonome, ces espaces vectoriels sont de dimension finie et s'organisent en un faisceau constructible. Nous espérons pouvoir préciser l'énoncé de ce résultat.

Les faisceaux constructibles sont des objets géométriques : prendre par exemple une famille d'espaces vectoriels constants sur une variété algébrique et nuls en dehors, ... . Si l'on se donne un faisceau constructible, une question qui se pose est de savoir s'il existe des $\mathcal{D}$ Modules dont ce faisceau constructible soit le faisceau de leurs solutions analytiques complexes. Un théorème de Mebkhout et Kashiwara assure l'existence de tels $\mathcal{D}$ Modules. Mais fait remarquable, il en existe un unique dont les solutions analytiques complexes possèdent certaines conditions de croissance. On obtient une correspondance qui s'est avérée d'une grande importance entre les objets de natures géométriques que sont les faisceaux constructibles et des objets algébriques que sont les $\mathcal{D}$ Modules réguliers.