Sur la cohomologie de certains espaces de modules de fibrés vectoriels

Arnanud Beauville*

Dédié à M.S. Narasimhan et C.S. Seshadri
pour leur $60^{ème}$ anniversaire

37 Soit X une surface de Riemann compacte. Fixons des entiers r et d *premiersm entre eux*, avec $r \geqslant 1$, et notons $\mathcal{M}$ 1' espace des modules $\mathcal{U}_x(r, d)$ des fibriés d. C'est une variété projective et lisse, et il existe un *fibré de Poincaé $\mathcal{E}$ sure $X \times \mathcal{M}$*; cela signifie que pour tout point e de $\mathcal{M}$, correspondant à un fibré E sur X, la restriction de $\mathcal{E}$ à $X \times e$ est isomorphe à E.

Notons p, q les projections de $X \times \mathcal{M}$ sur X et $\mathcal{M}$ respectivement. Soit m un entier $\leqslant r$; la classe de Chern $c_m(\mathcal{E})$ admet une décomposition de Künneth

$$c_m(\mathcal{E}) = \sum_i p^* \xi_i \cdot q^* \mu_i,$$

avec $\xi_i \in H^*(X, \mathbf{Z}), \mu_i \in H^*(\mathcal{M}, \mathbf{Z}), \deg(\xi_i) + \deg(\mu_i) = 2m$.

Nous dirons que les classes μ_i sont les *composantes de Künneth de $c_m \mathcal{E}$*. Un des reśultats essientiels de [A-B] est la détermination d'un ensemble de générateurs de l'algébre de cohomologie $H^*(\mathcal{M}.\mathbf{Z})$; il a la consèquence suivante:

Théorème. *L'algèbre de cohomologie $H^*(\mathcal{M}, \mathbf{Q})$ est engendrée par les composantes de Künneth des classes de Chern de $\mathcal{E}$.*

Let but de cette note est de montrer comment la méthode de la diagonale utlilisée dans [E-S] fournit une démonstration trés simple de ce théorème. Celcui-ci résulte de l'énoncé un peu plus général que voice:

*Avec le support partiel du projet europeéen Science "Gremetry of Algebraic Varieties", Contrat n° SCI-0398-C(A).

Proposition. *Soient X une variété complex projective et lisse, et $\mathcal{M}$ un espace de modules espace de modules de faisceaux stables sur x (par rapport á une polarisation fixée, cf. [M]). On fait les hypothèses suivantes:* **38**

(i) La variété $\mathcal{M}$ est projective et lisse.

(ii) Il existe un faiseceau de Poincaré $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{M}$.

(iii) Pour E, F dans $\mathcal{M}$, on a $\mathrm{Ext}^i(E, F) = 0$ *pour* $i \geqslant 2$.

Alors l'algèbre de cohomologie $H^*(\mathcal{M}, \mathbf{Q})$ est engendrée par les composantes de Künneth des classes de Chern de $\mathcal{E}$.

La démostration suit de près celle du th. 1 de [E-S]. Rappelons-enl' idèe fondamentale: soit δ la classe de cohomologie de la diagonale dans $H^*(\mathcal{M} \times \mathcal{M}, \mathbf{Q})$; notons p et q les deux projections de $\times \mathcal{M}$ sur $\mathcal{M}$. Soit $\delta = \sum_i p^*\mu_i \cdot q^*\upsilon_i$, la décompostion de Künneth de δ; alors l'espace $H^*(\mathcal{M}, \mathbf{Q})$ est engendré par les v_i. En effect, pour λ dans $H^*(\mathcal{M}, \mathbf{Q})$, on a

$$\lambda = q_*(\delta \cdot p^*\lambda) = \sum \deg(\lambda \cdot \mu_i) v_i$$

d'où notre assertion. Il s'agint donce d' exprimer la classe δ en fonction des classes de Chern du fibré universel.

Notons p_1, p_2 le deux projections de $C \times \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ sur $C \times \mathcal{M}$, et π la projections sur $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$; désignons par $\mathcal{H}$ le faisceau $\mathrm{Hom}(p_1^*\mathcal{E}, p_2^*\mathcal{E})$. Vul',hypothèse (iii), l'hypercohomologie $R\pi_*\mathcal{H}$ est reprèsentée dans la catégorie dérivée par un complexe de fibrés $K^\bullet$, nul en degré différent de O rt 1. Autrement dit, il existe un morphisme de fibrés $u{:}K^0 \longrightarrow K^1$ tel qu, on ait, pour tout point $x = (E, F)$ de $\mathcal{M}$, une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}(E, F) \to K^0(x) \xrightarrow{u(x)} k^1(x) \to \mathrm{Ext}^1(E, F) \to 0.$$

Come l'espace $Hom(E, F)$ est non nul si et seulement si E et F est non nul si et seulement si E F sont isomorphes, on voit que la diagonale Δ de $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ coïncide ensemblistement avecle lieu de dégénérescence D de u (défine par l'annulation des mineurs de rang maximal de u). On peut prouver comme dans [E-S] l' égalité schématique, mais cela n'est pas nécessaire pour démontrer la proposition.

Soit E un eélément de $\mathcal{M}$. On a

$$\mathrm{rg}(K^0) - \mathrm{rg}(K^1) = \dim \mathrm{Hom}(E,F) - \dim \mathrm{Ext}^1(E,F)$$

39 quel que soit le point (E,F) de $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$. Puisque $\mathrm{Ext}^2(E,E) = 0$, la dimension m de $\mathcal{M}$ est egale à dim $\mathrm{Ext}^1(E,E)$; ainsi la sous-variéé déterminantale D de $\mathcal{M}\times\mathcal{M}$ a la codimension attendue $\mathrm{rg}(K^1) - \mathrm{rg}(k^0) + 1$. Sa classe de cohomologie $\delta' \in H^m(\mathcal{M} \times M, \mathbf{Z})$ est alors donnée par la formule de Proteous

$$\delta' = c_m(K^1 - K^0) = c_m(-\pi!\mathcal{H}),$$

où $\pi!$ désigne le foncteur image directe en K-théorie. Cette classe étant multiple de la classe δ de la diagonale, on conclut avec le lemme suivant:

Lemme. *Soit $\mathcal{A}$ la sous-bQ-algb̀re de $H^*(\mathcal{M}, \mathbf{Q})$ engendrée par les composantes de Künneth des classes de Chern de $\mathcal{E}$, et soient p et q les deux projecutions de $\mathcal{M} \times M$ sur calM. Les classes de Chern de $\pi!\mathcal{H}$ sont de la forme $\sum P^*\mu_i \cdot q^*\nu_i$, avec $\mu_i, \nu_i \in \mathcal{A}$.*

Notons r la projections de $C \times \mathcal{M} \times M$ sur C. Tout polynôme en les classes de Chern de $p_1^* calE$ et de $P_2^*\mathcal{E}$ est une somme de produits de la forme $r^*\gamma \cdot \pi^* p^*\mu \cdot \pi^* q^*\nu$, où μ et ν appartiennent à $\mathcal{A}$. Le lemme rémme rśulte alors de la formule de Riemann-Roch

$$ch(\pi!\mathcal{H}) = \pi_*(r^* \,\mathrm{Todd(C)}\, \mathrm{ch}(\mathcal{H})).$$

Remarque . La condition (iii) de la proposition est évidenmment très con-traignante. Donnons deux exemples:

a) X est une surface rationnelle ou réglée, et la polarisation H vérifie $H \cdot K_x < 0$. L'argument de [M, cor. 6.7.3] montre que la condition (iii) est satisfaite. Si de plus les coefficients a_i du polynô me de Hilbert des éléments de $\mathcal{M}$, écrit sous la forme $\mathcal{X}(E) \otimes H^m) = \sum_{i=0}^{2} a_i \binom{m+i}{i}$, sont premiers entereux, les conditions (i) à (iii) sont satisfaites [M, §6].

Dans le cas d' une surface *rationnelle*, on obtient mieux. Pour toute variété T, désignons par $CH^*(T)$ l'anneau de Chow de T; grâ ce à l'isomorphisme $CH^*(Xtimes\mathcal{M}) \cong CH^*(X) \otimes CH^*(\mathcal{M})$, on peut remplacer dans la démonstration de la proposition l'anneau de cohomologie par l'anneau de Chow. On en déduit que*la cohomologie rationnelle de* $\mathcal{M}$ *est algébrique*, c'est-à-dire que l'application "classe de cycles" de cycles" $CH^*(\mathcal{M}) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow H^*(\mathcal{M}, \mathbf{Q})$ est u isomphisme d' anneaux. Dans le cas $X = \mathbf{P}^2$, ellingsrud et Strømme obtiennent le môme résultat *sur* $\mathbf{Z}$, plus le fait que ces groupes sont sans torsion, grâce à l'outil supplémentaire de la suite spectrale de Beilinson.

b) X est une variétée de Fano De dimension 3. Soit S une surface lisse appartenant au système linéaire $|-K_x|$ (de sorte que S est une surface $K3$). Lorsqu'elle est satisfaite, la condition (iii) a des conséquences remarquables [T]: elle entraîne que "application de restriction $E \longmapsto E_{|S}$ définit un isomorphisme de $\mathcal{M}$ *une sous-variété largrangienne* d'un espace de modules $\mathcal{M}_S$ de fibrés sur S (muni de sa structure symplectique canonique). Il me semble intéressant de mettre en évidence des espace de modules de fibrés sur une variété de Fano (et déjà sur $\mathbf{P}^3$) possédant la propriété (iii).

Références

[A-B] M. Atiyah et R. Bott, *Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Phil. Trans. R. Soc. London A **308** (1982) 523–615.

[E-S] G. Ellingsrud et S.A. Strømme, *Towards the Chow ring of the Hilbert scheme of* $\mathbf{P}^2$, J. reine angew. Math. **441** (1993) 33–44.

[M] M. Maruyama, *Moduli of stable sheaves, II.* J. Math. Kyoto Univ. **18** (1978) 557–614.

[T] A. N. Tyurin, *The moduli space of vector bundles on threefolds, surfaces and surves I,* preprint (1990).

Arnaud Beaville
Université Paris-Sud
Mathématiques- Bât. 425
91 405 Orsay Cedex, France