

SURFACES ALGÈBRIQUES COMPLEXES

ARNAUD BEAUVILLE

INTRODUCTION

Cet exposé comprend deux parties. La première est un survol assez rapide de la classification d'Enriques des surfaces algébriques. On s'est inspiré, bien entendu, de la littérature classique sur le sujet, et en particulier du séminaire Chafarevitch [Ch.2]. On a essayé d'être aussi élémentaire que possible, en supposant toutefois connue la cohomologie des faisceaux cohérents. On renvoie à [Be] pour une exposition plus détaillée ainsi que pour des exemples.

La seconde partie comprend des indications sur la démonstration par Chafarevitch et Piatechki-Chapiro du théorème de Torelli pour les surfaces $K 3$ ([Ch.P]).

PREMIERE PARTIE§1. Notations et rappels.

Nous dirons simplement surface au lieu de surface projective et lisse sur \mathbb{C} .

Soit S une surface, D, D' deux diviseurs sur S . On note :

- $D \equiv D'$ si D et D' sont linéairement équivalents (i.e. $D-D'$ est le diviseur d'une fonction rationnelle sur S).
- $\mathcal{O}_S(D)$ le faisceau inversible associé à D .
- $H^i(S, \mathcal{O}_S(D))$, ou simplement $H^i(D)$ s'il n'y a pas de confusion possible, les espaces de cohomologie du faisceau $\mathcal{O}_S(D)$.
- $h^i(D) = \dim_{\mathbb{C}} H^i(D)$
- $\chi(\mathcal{O}_S(D)) = h^0(D) - h^1(D) + h^2(D)$
- $|D|$ = espace projectif des diviseurs effectifs linéairement équivalents à D .
 = espace projectif associé à $H^0(D)$.
- (Si $h^0(D) = 2$, on dit que $|D|$ est un pinceau).
- K_S ou K = diviseur canonique = un diviseur tel que $\mathcal{O}_S(K) = \Omega_S^2$.
- $\text{Pic}(S)$ = groupe des diviseurs modulo équivalence linéaire
 \cong groupe des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles

En vertu de théorèmes généraux, on a :

$$\text{Pic}(S) = H^1(S, \mathcal{O}_S^*) = H^1(S, {}^h\mathcal{O}_S^*)$$

où ${}^h\mathcal{O}_S$ désigne le faisceau des fonctions holomorphes sur S , considérée comme variété analytique. Cette dernière interprétation permet de considérer la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow {}^h\mathcal{O}_S \xrightarrow{\text{exp}} {}^h\mathcal{O}_S^* \rightarrow 0$$

d'où l'on déduit la suite exacte importante :

$$0 \rightarrow H^1(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S) \rightarrow \text{Pic}(S) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathcal{O}_S) \quad (a)$$

Posons : $\text{Pic}^0(S) = H^1(S, \mathcal{O}_S) / H^1(S, \mathbb{Z})$

$$\text{NS}(S) = \text{Ker}(H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathcal{O}_S))$$

Le groupe $\text{Pic}(S)$ apparaît comme une extension :

$$0 \rightarrow \text{Pic}^0(S) \rightarrow \text{Pic}(S) \rightarrow \text{NS}(S) \rightarrow 0$$

de deux groupes de nature différente :

- le groupe $\text{Pic}^0(S)$ est un groupe divisible; la théorie de Hodge montre que $H^1(S, \mathbb{Z})$ est un réseau dans $H^1(S, \mathcal{O}_S)$, autrement dit $\text{Pic}^0(S)$ a une structure naturelle de tore complexe - et même, en fait, de variété abélienne.

- le groupe $\text{NS}(S) \subset H^2(S, \mathbb{Z})$ est un groupe de type fini.

Le cup-produit sur $H^2(S, \mathbb{Z})$ induit sur $\text{NS}(S)$ une forme bilinéaire symétrique à valeurs dans \mathbb{Z} , le produit d'intersection; si D et D' sont deux diviseurs, on note $(D \cdot D')$ le produit de leurs classes dans $\text{NS}(S)$. On obtient ainsi une forme bilinéaire symétrique sur le groupe des diviseurs qui joue un rôle fondamental dans la théorie des surfaces. Si C, C' sont deux courbes irréductibles distinctes, on a :

$(C \cdot C')$ = nombre de points d'intersection de C et C' , comptés avec leur multiplicité.

Rappelons quelques théorèmes fondamentaux :

Théorème de Riemann-Roch : $\chi(\mathcal{O}_S(D)) = \chi(\mathcal{O}_S) + 1/2 (D^2 - D.K)$

Dualité de Serre : $h^i(K-D) = h^{2-i}(D)$, $0 \leq i \leq 2$.

On utilisera très souvent Riemann-Roch sous la forme suivante, qui utilise la dualité de Serre : $h^0(D) + h^0(K-D) \geq \chi(\mathcal{O}_S) + 1/2 (D^2 - D.K)$

Formule du genre : Soit C une courbe irréductible sur S .

On a : $\dim H^1(C, \mathcal{O}_C) = 1 + 1/2(C^2 + C.K)$

Ce nombre est le genre de C , noté $g(C)$. Si C est singulière, son genre est strictement plus grand que celui de sa normalisée; en particulier, on a $g(C) = 0$, si et seulement si $C \cong \mathbb{P}^1$.

Invariants numériques

On pose :

$q(S) = \dim H^1(S, \mathcal{O}_S) = \dim H^0(S, \Omega_S^1)$ (par théorie de Hodge)

$p_g(S) = \dim H^2(S, \mathcal{O}_S) = \dim H^0(S, \Omega_S^2) = \dim H^0(K)$ (par dualité de Serre)

$P_n(S) = \dim H^0(nK)$ pour $n \geq 1$.

On notera simplement q, p_g, P_n s'il n'y a pas de confusion possible.

Tous ces invariants sont des invariants birationnels. On a :

$$\chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q + p_g$$

On pose $b_i = \dim_{\mathbb{C}} H^i(X, \mathbb{C})$; par dualité de Poincaré, on a

$b_4 = b_0 = 1$ et $b_3 = b_1$. De plus, il résulte de la théorie de Hodge que $b_1 = 2q$.

On pose $\chi_{\text{top}}(S) = \sum (-1)^i b_i = 2 - 2b_1 + b_2$

Ces invariants sont reliés par la :

Formule de M. Noether : $12 \chi(\mathcal{O}_S) = K^2 + \chi_{\text{top}}(S)$

Nous utiliserons la variété d'Albanese d'une surface S ; rappelons ici les propriétés qui nous intéressent :

Rappel : variété d'Albanese.

Il existe une variété abélienne $\text{Alb}(S)$, de dimension g , et un morphisme $\alpha : S \rightarrow \text{Alb}(S)$ tels que :

- Si $g \geq 1$, $\alpha(S)$ n'est pas réduit à un point;
- Si $\alpha(S)$ est une courbe B , cette courbe est lisse de genre g et la fibration $p : S \rightarrow B$ a ses fibres connexes.

On dira que p est la fibration d'Albanese de S .

Nous utiliserons également le théorème classique suivant :

"Théorème de Bertini" : Soient S une surface, C une courbe, $q : S \rightarrow C$ un morphisme surjectif. Il existe une courbe lisse B et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{q} & C \\ & \searrow p & \nearrow \\ & & B \end{array}$$

tel que le morphisme $p : S \rightarrow B$ ait ses fibres connexes.

Notons que la fibre générique du morphisme p est alors lisse et irréductible, puisque la fibre générique d'un morphisme de variétés lisses sur C est toujours lisse (théorème de Sard).

Enfin la remarque suivante est triviale mais extrêmement utile :

Remarque utile :

Soient C une courbe irréductible sur S , telle que $C^2 \geq 0$, D un diviseur effectif. Alors $(D, C) \geq 0$.

Démonstration : on écrit $D = D' + nC$, où D' ne contient pas C , et $n \geq 0$; alors $(D, C) = (D', C) + n(C^2) \geq 0$.

§2. Applications birationnelles.

On peut classifier les surfaces à isomorphisme près, ou, plus grossièrement, à isomorphisme birationnel près. Le problème ne se pose pas pour les courbes, puisque toute application birationnelle d'une courbe lisse dans une autre est partout définie. Pour les surfaces, on va voir que toute application birationnelle s'obtient à partir de transformations "élémentaires", les éclatements.

Rappel : Soit S une surface, $p \in S$. Il existe une surface \hat{S} et un morphisme birationnel $\varepsilon : \hat{S} \rightarrow S$, tels que :

- ε restreint à $\varepsilon^{-1}(S-p)$ est un isomorphisme sur $S-p$;
- $\varepsilon^{-1}(p) = E$ est une courbe isomorphe à \mathbb{P}^1 , qui s'identifie naturellement à l'ensemble des directions tangentes à S en p .

On dit que \hat{S} est l'éclatement de S en p , et E la droite exceptionnelle de l'éclatement. On a :

$$\begin{aligned} \text{Pic}(\hat{S}) &\cong \text{Pic}(S) \oplus \mathbb{Z}[E] \\ \text{NS}(\hat{S}) &\cong \text{NS}(S) \oplus \mathbb{Z}[E] \end{aligned} \quad (b)$$

La forme d'intersection sur \hat{S} étant donnée par les formules :

$$\begin{aligned} (\varepsilon^* D \cdot \varepsilon^* D') &= (D, D') & D, D' \text{ diviseurs sur } S \\ (\varepsilon^* D, E) &= 0 \\ E^2 &= -1 \end{aligned}$$

De plus on a :

$$K_{\hat{S}} = \varepsilon^* K_S + E$$

Soit C une courbe irréductible sur S , passant par p avec multiplicité m . On définit le transformé strict \hat{C} de C comme l'adhérence dans \hat{S} de $\varepsilon^{-1}(C-p)$. On vérifie immédiatement que :

$$\begin{aligned} \varepsilon^* C &= \hat{C} + mE \\ \text{d'où l'on déduit : } \hat{C}^2 &= C^2 - m^2 \text{ et} \\ \hat{C} \cdot \hat{K} &= C \cdot K + m \quad (c) \end{aligned}$$

Nous admettons sans démonstration les théorèmes suivants (cf. par exemple [Ch. 1]) :

Théorème d'élimination des indéterminations.

Soient S une surface, V une variété algébrique, $\varphi : S \dashrightarrow V$ une application rationnelle. Il existe un morphisme $\eta : \tilde{S} \rightarrow S$, composé d'une suite finie d'éclatements, et un morphisme $f : \tilde{S} \rightarrow V$ tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{S} & \\ \eta \swarrow & & \searrow f \\ S & \dashrightarrow & V \end{array}$$

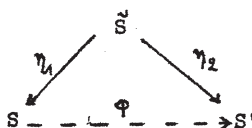
soit commutatif.

Théorème de structure des morphismes birationnels.

Tout morphisme birationnel (d'une surface dans une autre) est composé d'une suite finie d'éclatements.

Corollaire

Soit $\varphi : S \dashrightarrow S'$ une application birationnelle. Il existe une surface S et un diagramme commutatif :



où η_1, η_2 sont des composés d'un nombre fini d'éclatements.

Soit $f : S \rightarrow S'$ un morphisme birationnel. Le nombre n d'éclatements dont il est composé est déterminé par la formule $NS(S) \cong NS(S') \oplus \mathbb{Z}^n$; en particulier, tout morphisme birationnel de S dans elle-même est un isomorphisme.

Pour toute surface S , notons $B(S)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de surfaces birationnellement isomorphes à S . Si $S_1, S_2 \in B(S)$, on dit que S_1 domine S_2 s'il existe un morphisme birationnel (i.e. un composé d'éclatements) de S_1 dans S_2 . D'après ce qui précède, on introduit ainsi une relation d'ordre sur $B(S)$. On dit qu'une surface S est minimale si elle est minimale dans $B(S)$, c'est-à-dire si tout morphisme birationnel de S dans une surface S' est un isomorphisme.

Proposition

Toute surface domine une surface minimale.

Démonstration : Soit S une surface. Si S n'est pas minimale, il existe un morphisme birationnel $S \rightarrow S_1$ qui n'est pas un isomorphisme. Si S_1 n'est pas minimale, il existe de même $S_1 \rightarrow S_2$, et ainsi de suite; comme :

$$\text{rg } NS(S) > \text{rg } NS(S_1) > \text{rg } NS(S_2) > \dots \quad (\text{formule (b) p. 6})$$

on arrive nécessairement à une surface minimale dominée par S .

Disons qu'une courbe $E \subset S$ est exceptionnelle s'il existe un éclatement $\varepsilon : S \rightarrow S'$ (S' surface lisse) tel que E soit la droite exceptionnelle de ε ; il résulte du théorème de structure des morphismes birationnels qu'une surface est minimale si et seulement si elle ne contient pas de

courbe exceptionnelle.

Les courbes exceptionnelles sont caractérisées par le théorème suivant que nous admettrons :

Critère de contraction de Castelnuovo

Une courbe E est exceptionnelle si et seulement si $E \simeq \mathbb{P}^1$ et $E^2 = -1$

L'ensemble $B(S)$ sera en principe connu dès que l'on connaîtra ses éléments minimaux - tous les autres étant obtenus à partir de ceux-là par des éclatements. Deux cas peuvent se présenter : il y a un seul modèle minimal, ou il y en a plusieurs.

Définition 1 : Une surface S est réglée si elle est birationnellement isomorphe à $C \times \mathbb{P}^1$, où C est une courbe lisse. Si de plus $C = \mathbb{P}^1$, on dit que S est rationnelle.

Théorème des modèles minimaux

Soient S, S' deux surfaces minimales, $\varphi: S \rightarrow S'$ une application birationnelle. Si S n'est pas réglée, φ est un isomorphisme.

En particulier, $B(S)$ a un seul élément minimal, et tout automorphisme birationnel de S est un automorphisme.

La démonstration utilise le lemme fondamental de la théorie des surfaces:

Lemme-clé (Enriques-Castelnuovo)

Soient S une surface minimale non réglée, C une courbe irréductible.

Alors : $K.C \geq 0$.

Ce lemme sera démontré plus tard (§8) .

Démonstration du théorème : Par le théorème d'élimination des indétermina-

tions, il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{S} & \\ \eta \swarrow & & \searrow f \\ S & \xrightarrow{\varphi} & S' \end{array}$$

où $\eta = \varepsilon_n \circ \dots \circ \varepsilon_1$, est un composé de n éclatements et f un morphisme birationnel.

Parmi tous les diagrammes possibles, choisissons-en un tel que n soit minimal; il s'agit de montrer que $n = 0$. Soit E la droite exceptionnelle de l'éclatement ε_1 . Si $f(E)$ était réduit à un point, le morphisme f se factoriserait en $f' \circ \varepsilon_1$ et l'on contredirait la minimalité de n . Donc $f(E)$ est une courbe C . Comme f est un composé d'éclatements, il résulte de la formule (c) p.7 que :

$$(C.K_{S'}) \leq (E.K_{\tilde{S}}) = -1$$

d'où une contradiction avec le lemme-clé.

La classification des surfaces se divise donc en deux branches : d'un côté les surfaces réglées, qu'on peut considérer comme connues du point de vue birationnel, mais dont on cherchera les modèles minimaux; de l'autre les surfaces non réglées, pour lesquelles la classification "birégulière" revient essentiellement au même que la classification birationnelle : il suffira de classer les surfaces minimales.

§3. Surfaces réglées et rationnelles

Définition 2

Soit C une courbe lisse. Une surface géométriquement réglée de base C est une surface S , munie d'un morphisme lisse $p : S \rightarrow C$ dont

les fibres sont isomorphes à \mathbb{P}^1 .

Il n'est pas évident a priori qu'une surface géométriquement réglée est réglée (Déf.1); cela résulte du :

Théorème 3 (Noether-Enriques)

Soient S une surface, p un morphisme de S sur une courbe lisse C . On suppose qu'il existe $x \in C$ tel que la fibre $p^{-1}(x)$ soit isomorphe à \mathbb{P}^1 . Alors il existe un ouvert U de C , de la forme $U = C - \{x_1 \dots x_n\}$ ($x_i \neq x$) et un isomorphisme de $p^{-1}(U)$ sur $U \times \mathbb{P}^1$, commutant avec les projections sur U .

Pas 1 : $p_g(S) = 0$

Notons $F = p^{-1}(x)$. On a $F^2 = 0$ et $F.K = -2$ (formule du genre), donc si $D \in |K|$ on doit avoir $D.F = -2$ mais aussi $D.F \geq 0$ par la remarque utile (p. 6) , et par suite $|K| = \emptyset$.

Pas 2 : il existe un diviseur H sur S tel que $(H.F) = 1$.

Comme $p_g(S) = 0$, la flèche $\text{Pic}(S) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$ est surjective ((a)p.3). Il suffit donc de montrer qu'il existe une classe $h \in H^2(S, \mathbb{Z})$ telle que $h.f = 1$, en notant f la classe de F dans $H^2(S, \mathbb{Z})$. Pour a variable dans $H^2(S, \mathbb{Z})$, l'ensemble des entiers $(a.f)$ est un idéal de \mathbb{Z} , de la forme $d.\mathbb{Z}$ ($d \geq 1$). L'application $a \mapsto 1/d (a.f)$ est une forme linéaire sur $H^2(S, \mathbb{Z})$; par dualité de Poincaré, il existe un élément $f' \in H^2(S, \mathbb{Z})$ tel que :

$$(a.f') = 1/d (a.f) \quad \text{pour tout } a \in H^2(S, \mathbb{Z})$$

et donc $f = d.f'$ modulo torsion dans $H^2(S, \mathbb{Z})$,

Mais comme $f^2 = 0$, $f.[K] = -2$ et que $f'^2 + f'.[K]$ est pair, on voit qu'on a nécessairement $d = 1$, d'où le résultat.

Pas 3

Considérons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(H + (r-1)F) \longrightarrow \mathcal{O}_S(H+rF) \longrightarrow \mathcal{O}_P(1) \longrightarrow 0 \quad (r \in \mathbb{Z})$$

On en déduit la suite exacte longue de cohomologie :

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(S, \mathcal{O}_S(H+rF)) & \xrightarrow{a_r} & H^0(F, \mathcal{O}_P(1)) & \longrightarrow & H^1(S, \mathcal{O}_S(H+(r-1)F)) & & \\ & & & & \xrightarrow{b_r} & H^1(S, \mathcal{O}_S(H+rF)) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

La suite des espaces quotients $H^1(S, \mathcal{O}_S(H+rF))$ doit être stationnaire pour r assez grand; donc il existe un r tel que b_r soit bijectif et par suite a_r surjectif. Choisissons un sous-espace vectoriel V de $H^0(S, \mathcal{O}_S(H+rF))$, de dimension 2, tel que $a_r(V) = H^0(F, \mathcal{O}_P(1))$; notons P le pinceau correspondant. Il peut avoir des composantes fixes, mais elles doivent être contenues dans certaines fibres F_{x_1}, \dots, F_{x_k} de p distinctes de F (puisque P n'a pas de points fixes sur F). De même les points fixes de la partie mobile de P sont contenus dans des fibres $F_{x_{k+1}}, \dots, F_{x_l}$ distinctes de F . Enfin notons $F_{x_{l+1}}, \dots, F_{x_m}$ les fibres de p qui ne sont pas irréductibles. Posons $U = C - \{x_1, \dots, x_m\}$, et notons P' la restriction de P à $p^{-1}(U)$. Le pinceau P' est sans points fixes; toute courbe C_t de P' est réunion d'une section de p et éventuellement de certaines fibres; mais en fait C_t ne contient pas de fibres, sans quoi on aurait $C_t \cap C_{t'} \neq \emptyset$ pour $t \neq t'$. Donc le pinceau P' est formé de sections $(C_t)_{t \in \mathbb{P}^1}$ de la fibration p . Comme il est sans points fixes, il définit un morphisme $g : p^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{P}^1$, de fibre $g^{-1}(t) = C_t$; on en déduit un morphisme $h = (p, g)$ de $p^{-1}(U)$ sur $U \times \mathbb{P}^1$. Comme $h^{-1}((x, t)) = F_x \cap C_t$, h est un isomorphisme, d'où le théorème.

Remarque 4

Lorsque p est lisse, S est donc un fibré en droites projectives au-dessus de C , localement trivial (pour la topologie de Zariski). L'ensemble des classes d'isomorphisme de tels fibrés s'identifie à l'ensemble $H^1(C, \text{PGL}(2, \mathcal{O}_C))$. Or on déduit de la suite exacte :

$$1 \rightarrow \theta_C^* \rightarrow GL(2, \theta_C) \rightarrow PGL(2, \theta_C) \rightarrow 1$$

la suite exacte de cohomologie :

$$Pic(C) \rightarrow H^1(C, GL(2, \theta_C)) \rightarrow H^1(C, PGL(2, \theta_C)) \rightarrow H^2(C, \theta_C^*)$$

Or $H^2(C, \theta_C^*) = 0$, par exemple parce que C est une courbe; donc tout fibré en droites projectives sur C est le fibré projectif $\mathbb{P}_C(E)$ associé à un fibré vectoriel E de rang 2 sur C . Les fibrés $\mathbb{P}_C(E)$ et $\mathbb{P}_C(E')$ sont isomorphes si et seulement si il existe un fibré inversible L sur C tel que $E' \cong E \otimes L$.

La classification des surfaces géométriquement réglées sur C est donc ramenée à celle des fibrés vectoriels de rang 2 sur C . Celle-ci est loin d'être triviale, mais peut être considérée comme bien comprise - cf. [R].

Lemme 5

Soient S une surface, C une courbe lisse, $p : S \rightarrow C$ un morphisme dont la fibre générique est isomorphe à \mathbb{P}^1 . Si une fibre de p n'est pas irréductible, elle contient une droite exceptionnelle.

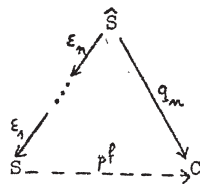
Démonstration : Soit F une fibre réductible, $F = \sum n_i C_i$. On a $C_i^2 < 0$ pour tout i (car $n_i C_i^2 = C_i \cdot (F - \sum_{j \neq i} n_j C_j) < 0$), donc par la formule du genre $K \cdot C_i \geq -1$, l'égalité n'ayant lieu que si C_i est une courbe exceptionnelle. Par suite si F ne contenait pas de courbes exceptionnelles, on trouverait $K \cdot F > 0$, ce qui contredirait $K \cdot F = -2$.

Théorème 6

Soit C une courbe lisse non rationnelle. Les modèles minimaux de $C \times \mathbb{P}^1$ sont les surfaces géométriquement réglées de base C .

Démonstration : Il est clair qu'une surface géométriquement réglée ne contient pas de droites exceptionnelles, car celles-ci devraient s'envoyer surjective-

ment sur C , ce qui est impossible. Soient \hat{S} une surface minimale, f une application birationnelle de \hat{S} sur $C \times \mathbb{P}^1$, p la projection de $C \times \mathbb{P}^1$ sur C . Considérons l'application rationnelle $p \circ f : \hat{S} \dashrightarrow C$; par le théorème d'élimination des indéterminations il existe un diagramme commutatif :



où les ξ_i sont des éclatements, et q_n un morphisme. Notons E_n la droite exceptionnelle de l'éclatement ξ_n . Comme C n'est pas rationnelle, $q_n(E_n)$ est réduit à un point, de sorte que q_n se factorise en $q_{n-1} \circ \xi_n$. En continuant le procédé, on voit finalement que pf est un morphisme, de fibre générique isomorphe à \mathbb{P}^1 .

D'après le lemme 5, les fibres de pf sont irréductibles, donc rationnelles lisses (puisqu'elles vérifient $F^2 = 0$, $F.K = -2$, d'où $g(F) = 0$): par suite \hat{S} est une surface géométriquement réglée de base C .

Nous nous contenterons d'énoncer sans démonstration le résultat analogue pour les surfaces rationnelles. On sait que tout fibré vectoriel sur \mathbb{P}^1 est somme de fibrés inversibles; il en résulte que les surfaces géométriquement réglées de base \mathbb{P}^1 sont les surfaces :

$$F_n = \mathbb{P}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)) \quad \text{pour } n \geq 0.$$

Théorème

Les surfaces rationnelles minimales sont \mathbb{P}^2 et les surfaces F_n pour $n \neq 1$.

Remarque 7

Il est facile de calculer les invariants numériques des surfaces réglées : si S est birationnellement équivalente à $C \times \mathbb{P}^1$, on trouve :

$$- P'_n(S) = 0 \text{ pour tout } n$$

$$- q(S) = g(C) .$$

Si de plus S est minimale $\neq \mathbb{P}^2$, on a :

$$K_S^2 = 8(1-q) \quad b_2(S) = 2$$

tandis que $K_{\mathbb{P}^2}^2 = 9$ et $b_2(\mathbb{P}^2) = 1$.

Nous allons voir qu'inversement l'annulation des P_n caractérise les surfaces réglées.

§4. Caractérisation des surfaces rationnelles et réglées.

Rappelons que nous démontrerons plus loin (§8) le :

Lemme-clé : Soit S une surface minimale non réglée, D un diviseur effectif sur S . Alors $D.K \geq 0$.

Lemme 8

Soit S une surface minimale avec $K^2 < 0$. Alors S est réglée.

Démonstration : Soit H une section hyperplane de S . Si $(H.K) < 0$, on applique le lemme-clé; de même si $(H.K) = 0$, en prenant $D = nH + K$ qui est effectif pour n assez grand. On peut donc supposer $(H.K) > 0$.

Posons $r_0 = \frac{H.K}{-K^2}$. On a :

$$(H + r_0 K)^2 = H^2 + \frac{(H.K)^2}{-K^2} > 0 \quad \text{et} \quad (H + r_0 K).K = 0, \text{ de sorte que si } r$$

est un rationnel $> r_0$ et suffisamment voisin de r_0 , on a :

$$(H+rK)^2 > 0 \quad (H+rK).K < 0 \quad (H+rK).H > 0$$

Posons $D_m = m(H+rK)$, pour tout m tel que $mr \in \mathbb{Z}$. Par Riemann-Roch, on a : $h^0(D_m) + h^0(K-D_m) \rightarrow \infty$ quand $m \rightarrow \infty$.

Comme $(K-D_m).H$ devient négatif pour m grand, on voit que pour m grand le système $|D_m|$ est non vide; comme $D_m.K < 0$, on conclut encore par le lemme-clé.

Théorème 9 (Castelnuovo)

Soit S une surface avec $q = P_2 = 0$. Alors S est rationnelle.

Démonstration : On peut supposer S minimale. Si $K^2 < 0$, on applique le lemme 8. Si $K^2 \geq 0$, le théorème de Riemann-Roch (compte tenu de $P_2 = 0$) donne : $h^0(-K) \geq 1 + K^2 \geq 1$ donc si H est une section hyperplane, on a $(K.H) < 0$, d'où le résultat par le lemme-clé.

Notre but est maintenant de caractériser les surfaces réglées par l'annulation des plurigenres P_n . Si $q = 0$, l'annulation de P_2 suffit; Si $q \geq 1$, celle de p_g n'est pas loin de suffire :

Lemme 10

Soit S une surface minimale avec $p_g = 0$, $q \geq 1$. On a alors $K^2 < 0$ (et donc S est réglée) sauf si $q = 1$; $b_2 = 2$, $K^2 = 0$.

Démonstration : la formule de Noether (p. 5) s'écrit ici :

$$10 - 8q = K^2 + b_2$$

Il suffit donc de vérifier qu'on ne peut avoir $q = 1$, $b_2 = 1$. On considère pour cela la fibration d'Albanese $p : S \rightarrow B$, où $B (= \text{Alb}(S))$ est une courbe elliptique; il est clair qu'une section hyperplane de S et une fibre générique de p sont linéairement indépendantes dans $NS(S)$, de sorte

que $b_2 \geq 2$.

Proposition 11

Soit S une surface minimale non réglée avec $p_g = 0$, $q = 1$.
Alors $S = (C \times F)/G$, où C et F sont des courbes lisses de genre ≥ 1 , G un groupe fini d'automorphismes de C , opérant sans points fixes sur $C \times F$ (de manière compatible avec la projection sur C), C/G est elliptique, et C ou F est elliptique.

Démonstration (rapide): On considère la fibration d'Albanese $p : S \rightarrow B$, où $B = \text{Alb}(S)$ est une courbe elliptique. On désigne par F_b la fibre $p^{-1}(b)$ pour $b \in B$, et par F_η une fibre générique de p . On pose $g = g(F_\eta)$.

Pas 1 : Si $g \geq 2$, p est lisse; si $g = 1$, les fibres de p sont soit lisses, soit de la forme nE , où E est une courbe elliptique lisse.

En premier lieu le fait que $b_2 = 2$ entraîne que les fibres sont irréductibles. On utilise ensuite la formule topologique suivante :

$$\chi_{\text{top}}(S) = \chi_{\text{top}}(B) \cdot \chi_{\text{top}}(F_\eta) + \sum_{b \in B} (\chi_{\text{top}}(F_b) - \chi_{\text{top}}(F_\eta)) \quad (d)$$

Lorsqu'une fibre générique F_η se spécialise en une fibre singulière (irréductible) F_b , un certain nombre de 1-cycles sur F (les "cycles évanescents") disparaissent dans l'homologie de F_b ; autrement dit, on a $b_1(F_b) < b_1(F_\eta)$, et donc $\chi_{\text{top}}(F_b) > \chi_{\text{top}}(F_\eta)$. Or par hypothèse $\chi_{\text{top}}(S) = \chi_{\text{top}}(B) = 0$; la formule (d) montre donc qu'il ne peut y avoir de fibres singulières. Enfin si $F_b = nC$, on trouve :

$$\chi_{\text{top}}(F_b) = \chi_{\text{top}}(C) = 2\chi(\theta_C) = (C.K) = \frac{1}{n}(F_b.K) = \frac{1}{n}(F_\eta.K) = \frac{1}{n}\chi_{\text{top}}(F_\eta)$$

donc $\chi_{\text{top}}(F_b) > \chi_{\text{top}}(F_\eta)$ sauf si $\chi_{\text{top}}(F_b) = \chi_{\text{top}}(F_\eta) = 0$.

Pas 2 : Si p est lisse, il existe un revêtement étale $C \rightarrow B$ tel que la fibration image réciproque $\tilde{S} = S \times_B C \rightarrow C$ soit triviale (i.e. $\tilde{S} \cong C \times F_\eta$).

La fibration p définit une famille de courbes de genre g sur B . Quitte à passer à un revêtement étale C de B , on peut "rigidifier" la cohomologie (mod n) de ces courbes, c'est-à-dire rendre constant le système localement constant des $H^1(F_b, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et en choisir une base symplectique. Si $n \geq 3$, on sait ([G]) qu'il existe une famille de courbes de genre g $P : U_{n,g} \rightarrow T_{n,g}$, à cohomologie (mod n) rigidifiée, qui est universelle; c'est-à-dire qu'il existe un morphisme $f : C \rightarrow T_{n,g}$ telle que la fibration $\tilde{S} \rightarrow C$ se déduise de P par image réciproque. Or le revêtement universel de C est \mathbb{C} et celui de $T_{n,g}$ est l'espace de Teichmüller T_g qui est un domaine borné, donc le morphisme f est trivial (i.e. $f(C)$ est un point), ce qui implique que la fibration $\tilde{S} \rightarrow C$ est triviale. On peut supposer le revêtement $C \rightarrow B$ galoisien de groupe G , de sorte que $S = (C \times F)/G$, avec C elliptique.

(Au lieu d'utiliser le théorème difficile de structure de l'espace de Teichmüller, on peut considérer l'espace $\mathcal{H}_{n,g}$ des modules des variétés abéliennes principalement polarisées, à cohomologie (mod n) rigidifiée; son revêtement universel est l'espace de Siegel H_g , qui est un domaine borné pratiquement par construction. Il faut alors utiliser le théorème de Torelli.)

Pas 3 : Si p a des fibres multiples (donc $g = 1$), il existe un revêtement ramifié $C \rightarrow B$ tel que si \tilde{S} désigne la normalisée de $S \times_B C$, la fibration $\tilde{S} \rightarrow C$ déduite de p soit triviale.

Soit B' une courbe lisse sur S , telle que $p(B') = B$; notons S' la normalisée de $S \times_B B'$. Alors S' est lisse; on montre que pour un choix convenable de B' , la projection $S' \rightarrow S$ est étale. La fibration $p' : S' \rightarrow B'$ déduite de p possède une section : elle n'a donc pas de fibres multiples, autrement dit p' est lisse. Quitte à passer à un revêtement étale C de B' , on a alors comme précédemment un morphisme $f : C \rightarrow T_{n,1}$ ($n \geq 3$). Or $T_{n,1}$ est une courbe affine (c'est un revêtement ramifié de \mathbb{C} , via l'invariant j), donc f est trivial et la fibration sur C déduite de p' est triviale. On peut supposer le revêtement $C \rightarrow B$ galoisien de groupe G , de sorte que $S = (C \times F_1)/G$, avec

F_η elliptique.

La proposition est donc démontrée.

Corollaire 12

Soit S une surface minimale non réglée avec $p_g = 0$, $q \geq 1$.

- (i) Il existe un entier $n \geq 0$ tel que $P_n \neq 0$;
- (ii) Si $S = (E \times F)/G$, où E et F sont elliptiques, on a $nK \equiv 0$;
- (iii) Si S n'est pas du type précédent, les P_m ne sont pas bornés.

Démonstration : Il résulte de la proposition qu'il existe un revêtement étale de degré n $\pi : C \times F \rightarrow S$, avec $g(C), g(F) \geq 1$. On a $p_g(C \times F) = g(C).g(F) \geq 1$, donc il existe un diviseur effectif $D \in |K_{C \times F}|$; comme π est étale, on sait que $K_{C \times F} \cong \pi^* K_S$, de sorte que :

$$\pi_* D \in |\pi_* \pi^* K_S| = |n.K_S| \quad \text{d'où} \quad P_n(S) \geq 1.$$

Le même argument montre que $P_{rn}(S) \geq P_r(C \times F)$, ce qui montre que les P_n sont non bornés dès que $g(C)$ ou $g(F) \geq 2$. Enfin si C et F sont elliptiques, on a $K_{C \times F} \equiv 0$; donc si $D \in |nK_S|$, le diviseur $\pi^* D$ est nul, ce qui signifie que $D = 0$, i.e. $n.K_S \equiv 0$.

Du théorème de Castelnuovo, du lemme 10 et du corollaire 12 résulte le :

Théorème 13 (Enriques)

Une surface S est réglée si et seulement si $P_n = 0$ pour tout $n \geq 0$.

Remarque 14

Une étude plus approfondie des surfaces du type $(C \times F)/G$ donne la condition d'Enriques : S est réglée si et seulement si $P_{12} = 0$.

Les surfaces du type $S = (E \times F)/G$, où E et F sont elliptiques et $p_g = 0$, sont appelées surfaces bielliptiques (ou parfois hyperelliptiques, mais cette terminologie prête à confusion). On peut en donner une classifica-

tion complète.

§5. Dimension de Kodaira

Les résultats qui précèdent montrent l'importance des P_n dans la classification des surfaces. Ils conduisent à poser la :

Définition 15

Soit S une surface; pour $n \geq 0$, notons φ_{nK} l'application rationnelle de S dans un espace projectif (éventuellement vide) définie par le système $|nK|$. La "dimension de Kodaira" de S , notée $\kappa(S)$ (ou simplement κ) est la plus grande dimension des images des φ_{nK} pour $n \geq 0$.

(On convient de poser $\dim(\emptyset) = -1$).

Explicitons la définition :

- $\kappa(S) = -1 \Leftrightarrow P_n = 0$ pour tout $n \Leftrightarrow S$ réglée (par le théorème d'Enriques).
- $\kappa(S) = 0 \Leftrightarrow P_n = 0$ ou 1 , et il existe N tel que $P_N = 1$.
- $\kappa(S) = 1 \Leftrightarrow$ Il existe N tel que $P_N \geq 2$; et pour tout n , l'image de φ_{nK} est au plus une courbe.
- $\kappa(S) = 2 \Leftrightarrow$ Il existe N tel que l'image de φ_{NK} soit une surface.

Une définition analogue peut être donnée pour les courbes; on voit aussitôt que $\kappa(\mathbb{P}^1) = -1$, $\kappa(C) = 0$ si et seulement si C est elliptique, et $\kappa(C) = 1$ si et seulement si $g(C) \geq 2$.

Exemple 16

- 1/ $S = C \times C'$. On vérifie immédiatement que :
- si C ou $C' = \mathbb{P}^1$, $\kappa(S) = -1$;
 - si C et C' sont elliptiques, $\kappa(S) = 0$;
 - si C est elliptique, et $g(C') \geq 2$, $\kappa(S) = 1$;
 - si $g(C)$ et $g(C') \geq 2$, $\kappa(S) = 2$.

2/ $S = V_{d_1, \dots, d_r}$ = intersection complète dans \mathbb{P}^{r+2} de r hypersurfaces de degrés d_1, \dots, d_r .

Un calcul facile montre que $K_S \equiv (\sum d_i - r - 3)H$, où H est une section hyperplane de S . Il en résulte que :

$$K(S) = -1 \quad \text{pour } S = V_2, V_3, V_{2,2}$$

$$K(S) = 0 \quad (\text{et en fait } K_S \equiv 0) \quad \text{pour } S = V_4, V_{2,3}, V_{2,2,2}$$

$$K(S) = 2 \quad \text{pour les autres.}$$

3/ Toute surface telle que $n \cdot K \equiv 0$ pour un entier n , en particulier toute surface bielliptique (remarque 14) ou abélienne, a dimension de Kodaira zéro.

§6. Surfaces avec $\kappa = 0$.

Ce sont les surfaces avec $P_n = 0$ ou 1 pour tout n , et $P_n = 1$ pour au moins un n .

Lemme 17

Soit S minimale avec $\kappa = 0$.

a/ On a $K^2 \geq 0$

b/ On a $\chi(\theta_S) \geq 0$

c/ Si $P_n = P_m = 1$, et $d = (n, m)$, on a $P_d = 1$.

Démonstration : a/ On a $K^2 \geq 0$ par le lemme 8 ; supposons $K^2 > 0$. On a par Riemann-Roch :

$$h^0(nK) + h^0((1-n)K) \rightarrow \infty \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Pour $n \geq 2$, le système $| (1-n)K |$ ne peut contenir un diviseur E ,

sans quoi on aurait $(E.K) \geq 0$ (Lemme-clé) et donc $K^2 \leq 0$; on trouve donc que $P_n \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, ce qui contredit $K = 0$.

b/ Comme $K^2 = 0$, la formule de Noether s'écrit :

$$8\chi(\Theta_S) = \chi_{\text{top}}(S) = 2 - 4q + b_2$$

soit : $8\chi(\Theta_S) = -2 - 4p_g + b_2 \geq -6$ (puisque $p_g \leq 1$)

d'où le résultat.

c/ Soient $D \in |nK|$, $E \in |mK|$; posons $m = m'd$, $n = n'd$. Comme $P_{\frac{nm}{d}} = 1$, on a $m'D = n'E \in |\frac{mn}{d}K|$, d'où $D = n'\Delta$, $E = m'\Delta$ pour un diviseur effectif Δ . Posons $\mathcal{E} = \Delta - dK$ dans $\text{Pic}(S)$; on a $m'\mathcal{E} = n'\mathcal{E} = 0$, d'où $\mathcal{E} = 0$ puisque $(m', n') = 1$; donc $\Delta \in |dK|$ et $P_d = 1$.

Théorème 18

Soit S une surface minimale avec $K = 0$. Une des 4 possibilités suivantes est réalisée :

- 1/ $p_g = 0$, $q = 0$. Alors $2K \equiv 0$. On dit que S est une "surface d'Enriques".
- 2/ $p_g = 0$, $q = 1$: S est une surface bielliptique (remarque 14)
- 3/ $p_g = 1$, $q = 0$. Alors $K \equiv 0$. On dit que S est une "surface K3".
- 4/ $p_g = 1$, $q = 2$. Alors S est une surface abélienne.

Démonstration : 1/ Si $p_g = 0$, $q = 0$, on a $P_2 \geq 1$ par le théorème de Castelnuovo, d'où par Riemann-Roch :

$$h^0(-2K) + h^0(3K) \geq 1.$$

Comme $p_g = 0$, on doit avoir $P_3 = 0$ par le lemme 17. c/ , donc $h^0(-2K) \geq 1$; par suite $2K \equiv 0$.

2/ Les surfaces minimales avec $p_g = 0$, $q \geq 1$ ont été

- classifiées (§4); il résulte du corollaire 12 que celles qui vérifient $K = 0$ sont les surfaces bielliptiques.
- Supposons maintenant $p_g = 1$. Par le lemme 17 b/, on a $q = 0, 1$ ou 2 .
- 3/ Si $q = 0$, Riemann-Roch donne $h^0(-K) + h^0(2K) \geq 2$, d'où $h^0(-K) = 1$ et $K \equiv 0$.
- 3'/ Si $q = 1$, il existe un diviseur \mathcal{E} tel que $\mathcal{E} \neq 0$ mais $2\mathcal{E} \equiv 0$. Appliquons-lui Riemann-Roch :
- $$h^0(\mathcal{E}) + h^0(K - \mathcal{E}) \geq 1 \quad \text{d'où} \quad h^0(K - \mathcal{E}) \geq 1.$$
- Soit $D \in |K - \mathcal{E}|$, $K_0 \in |K|$; puisque $P_2 = 1$, on a $2D = 2K_0$ et donc $D = K_0$, ce qui contredit $\mathcal{E} \neq 0$. Il existe donc pas de surface minimale avec $K = 0$, $p_g = 1$, $q = 1$.
- 4/ Il reste à démontrer qu'une surface vérifiant $K = 0$, $p_g = 1$, $q = 2$ est une surface abélienne. C'est l'objet de la proposition 20.

Lemme 19

Soient S une surface, B une courbe lisse, $p : S \rightarrow B$ un morphisme surjectif à fibres connexes, C_1, \dots, C_r les composantes irréductibles d'une fibre F_b de p , $D = \sum n_i C_i$ ($n_i \in \mathbb{Z}$).

Alors $D^2 \leq 0$, et $D^2 = 0$ si et seulement si $D = r.F_b$ ($r \in \mathbb{Q}$).

Démonstration : Posons $F_b = \sum m_i C_i$, $m_i > 0$. On a :

$$D^2 = \sum_i n_i^2 C_i^2 + 2 \sum_{i < j} n_i n_j (C_i \cdot C_j)$$

Éliminons les C_i^2 en utilisant le fait que $(F_b \cdot C_i) = 0$:

$$D^2 = \sum_i n_i^2 (C_i \cdot \sum_{j \neq i} -\frac{m_j}{m_i} \cdot C_j) + 2 \sum_{i < j} n_i n_j (C_i \cdot C_j)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i < j} (C_i \cdot C_j) \left(-n_i^2 \frac{m_j}{m_i} - n_j^2 \frac{m_i}{m_j} + 2 n_i n_j \right) \\
&= - \sum_{i < j} (C_i \cdot C_j) m_i m_j \left(\frac{n_i}{m_i} - \frac{n_j}{m_j} \right)^2 \leq 0
\end{aligned}$$

Comme $\cup C_i$ est connexe, on n'a égalité que si $\frac{n_i}{m_i} = \frac{n_j}{m_j}$ pour tous i, j , d'où le lemme.

Proposition 20

Soit S une surface minimale avec $\kappa = 0$, $p_g = 1$, $q = 2$. Alors S est une surface abélienne.

Démonstration : Notons $A = \text{Alb}(S)$ et $\alpha : S \rightarrow A$ le morphisme d'Albanese. On distinguera quatre cas, suivant que $\alpha(S)$ est une courbe ou une surface, et K_S est trivial ou non.

1/ $\underline{K_S \neq 0}$

Notons K le diviseur effectif de $|K_S|$. Ecrivons $K = \sum n_i C_i$; comme $K^2 = 0$ et $K \cdot C_i \geq 0$ pour tout i , on a $K \cdot C_i = 0$; par suite :

$$0 = K \cdot C_i = n_i C_i^2 + \sum_{j \neq i} n_j (C_i \cdot C_j)$$

donc ou bien $C_i^2 = -2$ et C_i est rationnelle lisse (car $K \cdot C_i = 0$), ou bien $C_i^2 = 0$, $C_i \cdot C_j = 0$ pour tout $j \neq i$.

On conclut que si l'on écrit $K = \sum_{\alpha} D_{\alpha}$, où les D_{α} sont des diviseurs effectifs à supports connexes et disjoints, on a $D_{\alpha}^2 = 0$ pour tout α et :

- ou bien D_{α} est une courbe irréductible de genre 1 (i.e. une courbe elliptique lisse ou une courbe rationnelle avec un point double)
- ou bien D_{α} est réunion de courbes rationnelles lisses.

1 a/ $K \neq 0$ et $\alpha(S)$ est une courbe.

On considère la fibration d'Albanese $p : S \rightarrow B$. Comme B est de genre 2, les diviseurs D_α sont contenus dans des fibres de p ; par le lemme 19, on doit avoir $D_\alpha = r_\alpha F_{b_\alpha}$ pour tout α , avec $r_\alpha \in \mathbb{Q}^+$ et $b_\alpha \in B$. Pour n convenable on aura donc :

$$nK \equiv \sum n_\alpha F_{b_\alpha} = p^*(\sum n_\alpha b_\alpha) \text{ avec } n_\alpha \in \mathbb{Z}^+$$

dès que n est assez grand on aura $P_n \geq 2$, ce qui contredit $K = 0$.

1 b/ $K \neq 0$ et $\alpha(S) = A$.

Comme A ne contient pas de courbes rationnelles, toute composante D_α de K contenant des courbes rationnelles est contractée sur un point; or par un théorème de Mumford, tout diviseur effectif D tel que $\alpha(D)$ soit un point vérifie $D^2 < 0$. Les seuls D_α possibles sont donc de la forme nE , où E est une courbe elliptique lisse, telle que $\alpha(E)$ soit une courbe. On sait qu'à translation près, tout morphisme de E dans A est un morphisme de variétés abéliennes; de sorte qu'en choisissant convenablement l'origine de A on peut supposer que $\alpha(E) = E'$ est une sous-variété abélienne de A . Posons $A' = A/E'$, et considérons la fibration $f : S \rightarrow A'$. Par le théorème de Bertini (p. 5), il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & A' \\ & \searrow p & \nearrow \\ & & B \end{array}$$

où B est une courbe lisse, et où les fibres de p sont connexes. Comme $p(E)$ est réduit à un point, et $E^2 = 0$, on déduit du lemme 19 que $E = (1/q)F_b$, $q \in \mathbb{Z}$. On conclut alors comme précédemment que $P_n \geq 2$ pour n assez grand.

2 a/ $K \neq 0$ et $\alpha(S)$ est une courbe.

Posons $\alpha(S) = B$, et choisissons un revêtement étale de degré ≥ 2 $B' \rightarrow B$. Soit $S' = S \times_B B'$; S' est connexe, et munie d'un revêtement étale

$\pi: S' \rightarrow S$. On a $\chi(\mathcal{O}_{S'}) = 0$ et $K_{S'} \cong \pi^* K_S \cong 0$, d'où $p_g(S') = 1$; on en tire $q(S') = 2$. Mais on a $g(B') \geq 3$ et $q(S') \geq g(B')$ (par exemple parce que la flèche $H^0(B', \Omega_{B'}^1) \rightarrow H^0(S', \Omega_{S'}^1)$ est injective), d'où contradiction.

Il y a donc une seule possibilité :

2 b/ $K \cong 0$ et $\alpha(S) = A$.

Pour démontrer la proposition, il suffit de montrer que α est étale, puisque tout revêtement étale d'une variété abélienne est lui-même une variété abélienne; autrement dit, si ω est une 2-forme partout $\neq 0$ sur A , il suffit de montrer que $\alpha^* \omega$ est partout $\neq 0$ sur S . Comme α est généralement étale, la forme $\alpha^* \omega$ n'est pas identiquement nulle; puisque $K_S \cong 0$, elle est donc partout $\neq 0$.

§7. Surfaces avec $K = 1$ et $K = 2$.

Proposition 21

Soit S une surface minimale. Les conditions suivantes sont équivalentes.

a/ $K = 2$

b/ $K^2 > 0$ et S non rationnelle

c/ Il existe un entier n_0 tel que tout $n \geq n_0$, l'application rationnelle $\varphi_{nK}: S \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ est birationnelle.

Démonstration : Il est clair que $c/ \Rightarrow a/$. Montrons que $b/ \Rightarrow c/$: soit H une section hyperplane de S . Comme $K^2 > 0$, le théorème de Riemann-Roch donne : $h^0(nK - H) + h^0((1-n)K + H) \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$. Puisque $((1-n)K + H).K$ devient négatif pour n grand, il résulte du lemme-clé que le système $|((1-n)K + H)|$ est vide, donc pour $n \geq n_0$, $|nK - H|$ contient un diviseur effectif E_n : on a $nK = H + E_n$. Il est

alors clair que l'application rationnelle φ'_{nK} , restreinte à $S - E_n$, est un plongement.

L'implication a/ \Rightarrow b/ résulte aussitôt du :

Lemme 22

Soit S une surface minimale avec $K^2 = 0$. Supposons que pour un $n \geq 1$, le système $|nK|$ ne soit pas réduit à un seul diviseur, de sorte que $nK = Z + M$, où Z est la partie fixe de $|nK|$ et $|M|$ n'a pas de composantes fixes. On a alors $K.Z = K.M = Z^2 = Z.M = M^2 = 0$; le système $|M|$ n'a pas de points fixes, et définit un morphisme (égal à φ'_{nK}) de S sur une courbe.

Démonstration : S est non réglée, donc $K.Z$ et $K.M$ sont ≥ 0 (lemme-clé); comme : $nK^2 = K.Z + K.M$
on a $K.Z = K.M = 0$. Puisque le diviseur M est mobile, on a $M^2 \geq 0$ et $M.Z \geq 0$; or :

$$M^2 = M(nK - Z) = -M.Z \quad \text{donc} \quad M^2 = M.Z = 0$$

et par suite $Z^2 = Z.(nK - M) = 0$.

Comme $M^2 = 0$, le système $|M|$ est sans points fixes, et définit donc un morphisme $\varphi : S \rightarrow \mathbb{P}^N$; si $\varphi(S)$ était une surface, on aurait $M^2 > 0$, donc $\varphi(S)$ est une courbe.

Remarques 23

1/ On peut améliorer notablement l'assertion c/ : si S est une surface minimale, le système $|nK|$ est sans points fixes dès que $n \geq 4$; dès que $n \geq 5$, le morphisme $\phi_{|nK|}$ est un isomorphisme en dehors de certaines courbes rationnelles, qui sont contractées en des points singuliers d'un type très simple ("singularités rationnelles"). On renvoie à [B] pour une étude très complète de la situation.

2/ Malgré le peu qu'on en a dit, les surfaces avec $K = 2$ (appelées aussi "surfaces de type général" sont celles que l'on rencontre le plus fréquemment; il suffit pour s'en convaincre de regarder quelques exemples :

- Toutes les surfaces intersections complètes, sauf les $V_2, V_3, V_4, V_{2,2}, V_{2,3}, V_{2,2,2}$ sont de type général (exemple 16.2) ;
- Tout produit de courbes de genre ≥ 2 (plus généralement, toute surface fibrée sur une courbe de genre ≥ 2 , avec fibre générique de genre ≥ 2) est de type général (exemple 16.1);
- Toute surface contenue dans une variété abélienne est de type général;
- Si $f : S' \rightarrow S$ est surjectif, et si S est de type général, alors S' est de type général.

Passons maintenant aux surfaces avec $K = 1$:

Théorème 24

Soit S une surface minimale avec $K = 1$. Alors $K^2 = 0$, et il existe un morphisme surjectif $p : S \rightarrow B$, où B est une courbe lisse, la fibre générique de p étant une courbe elliptique lisse.

Inversement, soient S une surface minimale, B une courbe lisse, $p : S \rightarrow B$ un morphisme surjectif dont la fibre générique est elliptique. Alors l'une des 3 possibilités suivantes est réalisée :

(i) S est une surface réglée de base elliptique.

(ii) S est une surface avec $K = 0$.

(iii) On a $K = 1$; alors dans $\text{Pic}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$:

$$K \equiv \sum r_i F_{b_i}, \quad r_i \in \mathbb{Q}, \quad r_i > 0 \quad \text{avec } F_{b_i} = p^*(b_i).$$

Démonstration : Soit S une surface minimale avec $K = 1$; il résulte du lemme 8 et de la proposition 21 que $K^2 = 0$. Soit n tel que $P_n \geq 2$; notons Z la partie fixe du système $|nK|$, M sa partie mobile. Le lemme 22 montre que M définit un morphisme $q : S \rightarrow C$. D'après le théorème de Bertini (p. 5), il existe une factorisation :

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ p \nearrow & & \searrow \\ S & \xrightarrow{q} & C \end{array}$$

où B est une courbe lisse, et où la fibre générique F de p est lisse et irréductible. Comme F est contenue dans un diviseur de $|M|$ et que $K.M = 0$, on déduit du lemme clé que $K.F = 0$, d'où $g(F) = 1$ puisque $F^2 = 0$.

Inversement, partons d'une fibration $p : S \rightarrow B$ dont la fibre générique F est une courbe elliptique. Soit $D = \sum n_i C_i \in |nK|$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n_i \geq 1$). Comme $(D.F) = n(K.F) = 0$, les C_i doivent être contenus dans les fibres de p ; on a donc $D^2 \leq 0$, l'égalité n'étant réalisée que si

$$D = \sum r_i F_{b_i}, \quad \text{avec } r_i \in \mathbb{Q}_+ \quad (\text{lemme 19})$$

Examinons maintenant la place de S dans la classification. Si S est réglée de base C , la fibre F s'envoie surjectivement sur C , donc C est elliptique ou rationnelle. Si S était rationnelle on aurait $K^2 = 8$ ou 9 (remarque 7), d'où $|-K| \neq \emptyset$ par Riemann-Roch; mais alors on trouverait $(-K)^2 \leq 0$ d'après ce qui précède, ce qui est impossible.

Si S n'est pas réglée, on a nécessairement $K^2 = 0$, donc $K < 2$.

La dernière assertion résulte de ce qui précède.
Corollaire 25

Soit S une surface minimale avec $K = 1$. Il existe un entier $d \geq 1$ tel que le système $|dK|$ soit sans points fixes.

Démonstration : Soient n tel que $P_n \neq 0$, et $D \in |nK|$; on a vu que

$$D = \sum r_i F_{b_i}, \text{ avec } r_i \in \mathbb{Q}^+ . \text{ Soit } e \text{ un entier } \geq 1 \text{ tel que } er_i = m_i \text{ soit entier pour tout } i ; \text{ alors :}$$

$$enK \equiv \sum m_i F_{b_i} = p^* \left(\sum m_i b_i \right)$$

Pour e assez grand, le système $|\sum m_i b_i|$ sur B est sans points fixes. Il en va donc de même pour le système $|dK|$, avec $d = en$.

§ 8. Démonstration du lemme-clé

Soit S une surface minimale, C une courbe sur S telle que $(C.K) < 0$. La formule du genre montre que $C^2 \geq 0$.

a/ On a $P_n(S) = 0$ pour tout $n \geq 0$; car si $D \in |nK|$, on aurait $D.C \geq 0$ par la remarque utile (p. 6), d'où $K.C \geq 0$.

b/ Si $q \geq 1$, l'image de S dans sa variété d'Albanese est une courbe : car si C' était une surface S' , on pourrait trouver une 2-forme holomorphe sur $\text{Alb}(S)$ ayant une restriction à S' non identiquement nulle; par image réciproque, on en déduirait une 2-forme holomorphe non nulle sur S .

Si $q \geq 1$, il existe donc une fibration $p : S \rightarrow B$, où B est une courbe lisse de genre q .

Premier cas : $K^2 \leq 0$.

On va supposer que S n'est pas réglée, et arriver à une contradiction.

c/ Il existe une courbe C telle que $C.K < 0$, $|C+K| = \emptyset$.

En effet le produit $(C+nK).C$ devient négatif pour n assez grand, donc par la remarque utile il existe un n tel que :

$|C + nK| \neq \emptyset$ $|C + (n+1)K| = \emptyset$
 Si $D = \sum n_i C_i \in |C + nK|$, on a $D.K < 0$ et $|D+K| = \emptyset$; donc il existe une courbe C_i vérifiant $C_i.K < 0$, et on a $|C_i + K| = \emptyset$.

d/ Soit C une courbe vérifiant $C.K < 0$, $|C+K| = \emptyset$. Alors $g(C) = q$; si $q \geq 2$, C est une section de la fibration $p : S \rightarrow B$; si $q = 1$, C est un revêtement étale de B .

Appliquant Riemann-Roch, on trouve en effet :

$$0 = h^0(C+K) \geq 1 - q + 1/2 (C^2 + C.K) = g(C) - q$$

c'est-à-dire $g(C) \leq q$

Si $q = 0$, on trouve $g(C) = 0$. Si $q \geq 1$, C ne peut être contenue dans une fibre F_b de p , sans quoi on aurait $F_b = nC$ (puisque $C^2 > 0$: lemme 19), d'où $g(F_b) \leq 0$ par la formule du genre, et S serait réglée. Donc C est un revêtement ramifié de B , de degré d , avec r points de ramification. La formule de Riemann-Hurwitz :

$$2g(C) - 2 = d(2q-2) + r$$

montre alors que $r = 0$, et $d = 1$ sauf si $q = 1$.

e/ Il existe une courbe C sur S vérifiant $C.K < -1$, $|C+K| = \emptyset$. C'est clair si $q = 0$, car pour toute courbe C telle que $C.K < 0$, $|C+K| = \emptyset$, on a $g(C) = 0$ par d/, donc $C.K \neq -1$ sans quoi C serait exceptionnelle. Supposons donc $q \geq 1$.

Soit C telle que $(C.K) < 0$, $|C+K| = \emptyset$. On voit comme en c/ qu'il existe un n tel que :

$$|2C + nK| \text{ contient un diviseur effectif } D; |D+K| = \emptyset.$$

On a $D.K < -1$. Posons $D = \sum_{i=1}^r n_i C_i$; on peut supposer que tous les C_i vérifient $C_i.K < 0$. On a aussi $|C_i + K| = \emptyset$, et par suite $g(C_i) = q$ (par d/).

Supposons qu'il existe un i tel que $n_i \geq 2$; alors $|K+2C_i| = \emptyset$, d'où par Riemann-Roch :

$$0 = h^0(K+2C_1) \geq 1-q + 1/2 (4C_1^2 + 2C_1.K) = 3(q-1) - (C_1.K)$$

ce qui est impossible.

Supposons que $r \geq 2$; alors $|K+C_1+C_2| = \emptyset$, d'où :

$$\begin{aligned} 0 = h^0(K+C_1+C_2) &= h^1(K+C_1+C_2) + 1-q + 1/2(C_1+C_2)^2 + 1/2(C_1+C_2).K \\ &= h^1(K+C_1+C_2) + q-1 + (C_1.C_2) . \end{aligned}$$

Ceci entraîne $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ et $h^1(K+C_1+C_2) = 0$; mais la suite exacte :

$$0 \rightarrow \theta_S(-C_1-C_2) \rightarrow \theta_S \rightarrow \theta_{C_1} \oplus \theta_{C_2} \rightarrow 0$$

donne $h^1(-C_1-C_2) = h^1(K+C_1+C_2) \geq 1$, d'où contradiction.

Ainsi le diviseur D est une courbe irréductible C , qui vérifie $(C.K) < -1$ et $|C+K| = \emptyset$.

f/ Où l'on arrive à une contradiction

Soit C une courbe vérifiant $(C.K) < -1$ et $|C+K| = \emptyset$. On a :

$$h^0(C) \geq 1-q + 1/2 (C^2 - C.K) = - (C.K) , \text{ i.e. } h^0(C) \geq 2 .$$

Si $q = 0$, on a donc sur S un pinceau de courbes rationnelles : on conclut par le théorème de Noether-Enriques que S est rationnelle.

Dans le cas $q \geq 1$, supposons d'abord que C soit une section de la fibration d'Albanese. Sa trace sur une fibre générique F est donc un point, et ce point doit bouger linéairement sur F : ceci entraîne que F est rationnelle, donc que S est réglée.

Reste enfin le cas où $q = 1$ et C est un revêtement étale de B ; dans ce cas on considère la surface $S' = S \times_B C$ et la fibration $p' : S' \rightarrow C$ déduite de p . Elle possède une section naturelle $e : C \rightarrow S'$; la projection $\pi : S' \rightarrow S$ est étale, de sorte que :

$$(e(C).K_{S'}) = \deg_C(e^* K_{S'}) = \deg_C(K_S) | _C = (C.K) < -1 \text{ et}$$

$$\chi(\theta_{S'}) = \deg(\pi) . \chi(\theta_S) = 0$$

Le théorème de Riemann-Roch donne alors comme précédemment $h^0(S', e(C)) \geq 2$, de sorte que S' est réglée et donc aussi S .

Deuxième cas : $K^2 > 0$

g/ Le lemme 10 montre alors que $q = 0$. Comme $P_2 = 0$, le théorème

de Riemann-Roch donne

$$h^0(-K) \geq 1 + K^2 \geq 2$$

Supposons que $|-K|$ contienne un diviseur réductible R . Comme $R.K < 0$, on peut écrire $R = C + E$, où C est une courbe irréductible telle que $(C.K) < 0$ et E un diviseur effectif; mais alors $|C+K| = |-E| = \emptyset$ et on conclut comme en f/ que S est rationnelle.

On peut donc supposer désormais que tout diviseur de $|-K|$ est irréductible. Comme $(-K)^2 > 0$, la remarque utile montre que pour tout diviseur D effectif sur S il existe un n tel que :

$$|D + nK| \neq \emptyset \quad |D + (n+1)K| = \emptyset$$

Soit $E \in |D + nK|$, et supposons d'abord $E \neq \emptyset$. Soit C une courbe irréductible contenue dans E ; on a $|C+K| = \emptyset$, et $C.K < 0$ puisque $|-K|$ contient au moins un pinceau de courbes irréductibles. On en déduit comme précédemment que S est rationnelle.

Reste le cas où quel que soit le diviseur D sur S , il existe un n tel que $D + nK \equiv 0$; autrement dit, où $\text{Pic}(S) = \mathbb{Z}.[K]$. Comme $p_g = 0$, la suite exacte ((a) p. 3) montre qu'on a alors $H^2(S, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.[K]$; la dualité de Poincaré entraîne alors $K^2 = 1$. Mais on a :

$$\chi_{\text{top}}(S) = 2 - 2b_1 + b_2 = 3$$

$$\chi(\mathcal{O}_S) = 1$$

et il y a donc incompatibilité avec la formule de Noether.

DEUXIEME PARTIE .

§1. Structures de Hodge .

Pour tout \mathbb{Z} -module Γ , on notera $\Gamma_{\mathbb{R}} = \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et $\Gamma_{\mathbb{C}} = \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$.

L'espace vectoriel complexe $\Gamma_{\mathbb{C}}$ est le complexifié de $\Gamma_{\mathbb{R}}$; il est donc muni d'une conjugaison canonique, notée $x \mapsto \bar{x}$.

Définition 1 : Une structure de Hodge de poids n sur un \mathbb{Z} -module de type fini Γ est une décomposition :

$$\Gamma_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q} \quad (p, q \geq 0)$$

où les $H^{p,q}$ sont des sous-espaces vectoriels complexes de $\Gamma_{\mathbb{C}}$, vérifiant $H^{q,p} = \bar{H}^{p,q}$.

Soit X une variété projective et lisse sur \mathbb{C} ; pour tout n , la théorie de Hodge définit une structure de Hodge de poids n sur $H^n(X, \mathbb{Z})$. Le sous-espace $H^{p,q}$ de $H^n(X, \mathbb{C})$ est alors canoniquement isomorphe à $H^q(X, \Omega^p)$; en particulier on identifie $H^0(X, \Omega_X^n)$ à un sous-espace de $H^n(X, \mathbb{C})$ (égal à $H^{n,0}$) via la cohomologie de de Rham : les n -formes holomorphes sont fermées, donc définissent des classes de cohomologie dans $H^n(X, \mathbb{C})$.

Exemple 1 : Structure de Hodge de poids 1.

Rappelons que si V est un espace vectoriel réel, il est équivalent de se donner une structure complexe sur V (i.e. un endomorphisme J de V tel que $J^2 = -1_V$) ou une décomposition de $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ en deux sous-espaces complexes conjugués : si V est muni d'une structure complexe, on décompose $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ suivant

les 2 sous-espaces propres de J relatifs aux valeurs propres $+i$ et $-i$; inversement, si $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = W \oplus \bar{W}$, on définit J sur V par la formule $J(w+\bar{w}) = i(w-\bar{w})$ pour tout $w \in W$.

Il en résulte que la donnée d'une structure de Hodge de poids 1 sur Γ est équivalente à la donnée d'une structure complexe sur $\Gamma_{\mathbb{R}}$, ou encore sur le tore réel $\Gamma_{\mathbb{R}}/\Gamma$. Si $\Gamma = H^1(X, \mathbb{Z})$, le tore complexe ainsi obtenu est la variété de Picard associée à X .

Exemple 2 : Structure de Hodge de poids 2 .

C'est une décomposition $\Gamma_{\mathbb{C}} = H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}$, avec $H^{2,0} = \bar{H}^{0,2}$ et $H^{1,1} = \bar{H}^{1,1}$. On ne sait pas associer à cette décomposition un objet géométrique aussi simple qu'un tore complexe.

Définition 2 : On appellera polarisation d'une structure de Hodge de poids n ($\Gamma, H^{p,q}$) la donnée d'une forme bilinéaire non dégénérée sur $\Gamma_{\mathbb{C}}$, symétrique si n est pair, alternée si n est impair, prenant des valeurs entières sur Γ , et vérifiant :

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &= 0 & \text{si } \alpha \in H^{p,q}, \beta \in H^{p',q'} \text{ et } p+p' \neq n ; \\ (\alpha, \bar{\alpha}) &> 0 & \text{si } \alpha \in H^{n,0}, n \text{ pair} ; \\ i(\alpha, \bar{\alpha}) &> 0 & \text{si } \alpha \in H^{n,0}, n \text{ impair} . \end{aligned}$$

Si X est une variété de dimension n , le cup-produit définit une polarisation sur la structure de Hodge de $H^n(X, \mathbb{Z})$.

Exemple 1 : (suite).

Une polarisation correspond à une forme alternée sur Γ , qui étendue à $\Gamma_{\mathbb{R}}$

vérifie :

$$(J\alpha.J\beta) = (\alpha.\beta) \quad \text{et} \quad (J\alpha.\alpha) > 0 \quad \text{pour} \quad \alpha, \beta \in \Gamma_{\mathbf{R}}.$$

C'est ce qu'on appelle une forme de Riemann (ou une polarisation) sur le tore complexe $T = \Gamma_{\mathbf{R}}/\Gamma$. A partir d'une telle polarisation, la théorie des fonctions thêta fournit un plongement projectif de T , qui est donc une variété abélienne.

Exemple 2 : (Suite)

Soit $(\Gamma, H^{p,q})$ une structure de Hodge polarisée de poids 2, de sorte que $\Gamma_{\mathbf{C}} = H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}$. Les sous-espaces $H^{2,0}$ et $H^{0,2}$ sont isotropes; comme $(\alpha.\bar{\alpha}) > 0$ pour tout $\alpha \in H^{2,0}$, la restriction de la forme bilinéaire à $H^{2,0} \oplus H^{0,2}$ est non dégénérée, de sorte que $H^{1,1}$ est l'orthogonal de $H^{2,0} \oplus H^{0,2}$ dans $\Gamma_{\mathbf{C}}$. Il en résulte que la donnée sur Γ , muni d'un produit scalaire, d'une structure de Hodge polarisée (par le produit scalaire donné) équivaut à celle du sous-espace isotrope $H^{2,0}$ dans $\Gamma_{\mathbf{C}}$, vérifiant $(\alpha.\bar{\alpha}) > 0$ pour tout $\alpha \in H^{2,0}$.

Notons $G(\Gamma_{\mathbf{C}})$ la grassmannienne des sous-espaces isotropes de dimension $h^{2,0}$ de $\Gamma_{\mathbf{C}}$; c'est une variété algébrique projective. La condition $(\alpha.\bar{\alpha}) > 0$ pour tout $\alpha \in H^{2,0}$ définit un ouvert (analytique) $G^0(\Gamma_{\mathbf{C}})$ de $G(\Gamma_{\mathbf{C}})$, dont les points correspondent bijectivement aux structures de Hodge polarisées sur Γ (muni d'un produit scalaire fixé).

Soit $X \rightarrow T$ un morphisme lisse de variétés algébriques, dont les fibres sont des surfaces, et soit O un point de T . Posons $\Gamma = H^2(X_O, \mathbf{Z})$, muni de la forme d'intersection. Supposons que l'action de $\pi_1(T, O)$ sur Γ soit triviale; il existe alors pour tout $t \in T$ un isomorphisme canonique $\Gamma \rightarrow H^2(X_t, \mathbf{Z})$,

respectant les formes d'intersection. En transportant par cet isomorphisme la structure de Hodge polarisée de $H^2(X_t, \mathbb{Z})$, on obtient pour tout t une structure de Hodge polarisée de poids 2 sur Γ , d'où une application $T \rightarrow G^0(\Gamma_{\mathbb{C}})$. La théorie de Hodge permet de prouver que cette application est analytique; on dit que c'est l'"application des périodes" de la famille de surfaces $X \rightarrow T$.

Cette terminologie est justifiée par la raison suivante. La structure de Hodge d'une surface X est déterminée par la position de $H^{2,0}$ dans $H^2(X, \mathbb{C})$; or si l'on identifie $H^{2,0}$ à $H^0(X, \Omega^2)$ et $H^2(X, \mathbb{C})$ au dual de $H_2(X, \mathbb{C})$, la flèche $i : H^0(X, \Omega^2) \rightarrow H_2(X, \mathbb{C})^*$ correspondant à l'inclusion est donnée par $\langle i(\omega), \gamma \rangle = \int_{\gamma} \omega$ pour $\omega \in H^0(X, \Omega^2)$, $\gamma \in H_2(X, \mathbb{Z})$. Si l'on fixe une base (ω_{α}) de $H^0(X, \Omega^2)$ et une base (γ_i) de $H_2(X, \mathbb{Z})$, la structure de Hodge est déterminée par la "matrice des périodes" $(\int_{\gamma_i} \omega_{\alpha})$.

Si par exemple $p_g(X) = 1$, la variété $G(\Gamma_{\mathbb{C}})$ est la quadrique dans $\mathbb{P}(H^2(X, \mathbb{C}))$ définie par l'annulation de la forme quadratique sur $H^2(X, \mathbb{C})$; si l'on choisit une base (γ_i) de $H_2(X, \mathbb{Z})$, le point de cette quadrique correspondant à la structure de Hodge de $H^2(X, \mathbb{Z})$ a pour coordonnées $\int_{\gamma_i} \omega$, où ω est une 2-forme $\neq 0$ sur X .

Problème de Torelli

R. Torelli a démontré ([T]) que la donnée des périodes d'une surface de Riemann X (i.e. de la structure de Hodge polarisée sur $H^1(X, \mathbb{Z})$, ou encore de la jacobienne polarisée JX) caractérise X à isomorphisme près. On appelle maintenant "problème de Torelli" la question de savoir si les structures de Hodge polarisées sur la cohomologie d'une variété déterminent la variété. La solution de ce problème très difficile n'est connue que dans de rares cas.

Le cas des surfaces K3 a été résolu récemment par Chafarevitch et Piatechki-Chapiro ([Ch-P]); on va donner ici une indication de leur démonstration.

On renvoie pour les détails (et des compléments) à l'article [Ch-P].

Étudions d'abord le problème de Torelli pour les surfaces abéliennes.

La structure de Hodge de poids un d'une telle surface A détermine sa variété de Picard, c'est à dire la variété abélienne duale \hat{A} ; il est bien connu que l'on récupère A comme variété abélienne duale de \hat{A} . On a également un théorème de Torelli pour les structures de Hodge de poids 2 :

Proposition 3 :

Soient A, A' deux surfaces abéliennes. Si les structures de Hodge polarisées sur $H^2(A, \mathbb{Z})$ et $H^2(A', \mathbb{Z})$ sont isomorphes, A et A' sont isomorphes.

Démonstration : Rappelons qu'il existe un isomorphisme canonique de $\Lambda^2 H^1(A, \mathbb{Z})$ sur $H^2(A, \mathbb{Z})$; avec cette identification, la décomposition de Hodge de $H^2(A, \mathbb{C})$ est donnée par :

$$H^2(A, \mathbb{C}) \cong \Lambda^2 H^1(A, \mathbb{C}) = \Lambda^2 H^{1,0} \oplus (H^{1,0} \otimes H^{0,1}) \oplus \Lambda^2 H^{0,1} .$$

Il faut donc montrer que la position de $H^{1,0}$ dans $H^1(A, \mathbb{C})$ est caractérisée par celle de $\Lambda^2 H^{1,0}$ dans $\Lambda^2 H^1(A, \mathbb{C})$; or, c'est là un résultat bien connu: il exprime que le "morphisme de Plücker", qui va de la grassmannienne des droites de \mathbb{P}^3 dans \mathbb{P}^5 , est un plongement.

§2. Surfaces de Kummer et surfaces K3 .

Rappelons (Théorème 18, 1ère partie) qu'une surface K3 est une surface vérifiant $K \equiv 0$, $q = 0$. Les intersections complètes $V_4, V_{2,3}, V_{2,2,2}$ sont des surfaces K3 (cf. exemple 16, 1ère partie); plus généralement, pour tout $g \geq 3$ il existe une famille de surfaces K3 de degré $2g-2$ dans \mathbb{P}^6 . Nous allons indiquer une construction particulière de surfaces K3, à partir de surfaces abéliennes.

Soit A une surface abélienne. L'involution θ de A , définie par $\theta(a) = -a$, admet 16 points fixes isolés a_1, \dots, a_{16} , qui sont les points d'ordre 2 de A . Notons $\varepsilon : \hat{A} \rightarrow A$ l'éclatement de ces 16 points, E_i le diviseur exceptionnel $\varepsilon^{-1}(a_i)$ ($1 \leq i \leq 16$). L'involution θ se prolonge en une involution σ de \hat{A} . On désigne par X la variété quotient \hat{A}/σ , par $\pi : \hat{A} \rightarrow X$ l'application canonique; on pose $L_i = \pi(E_i)$.

Proposition 4. La surface $X = \hat{A}/\sigma$ est une surface K3, appelée surface de Kummer associée à A .

Démonstration : Montrons d'abord que X est lisse. C'est clair en dehors des L_i ; soient $p \in E_i$, $q = \pi(p)$. On peut trouver des coordonnées locales (x, y) sur A au voisinage de a_i telles que :

$$\theta^*x = -x \quad \theta^*y = -y$$

et que x et $t = \frac{y}{x}$ forment un système de coordonnées locales dans \hat{A} au voisinage de p . Comme $\sigma^*t = t$, on conclut que t et $u = x^2$ forment un système de coordonnées locales sur X au voisinage de q ; en particulier X est lisse en q .

Soit ω une 2-forme holomorphe non nulle sur A . La forme $\varepsilon^*\omega$ est inva-

riante par σ ; elle est donc de la forme $\pi^*\alpha$, où α est une 2-forme méromorphe sur X . Il est clair que α est holomorphe et partout $\neq 0$ en dehors des L_i ; au voisinage de a_i , on a :

$$\omega = k \, dx \wedge dy \quad k \in \mathbb{C}$$

d'où, au voisinage de p : $\pi^*\omega = k \, dx \wedge d(tx) = kx \, dx \wedge dt = \frac{k}{2} \pi^*(du \wedge dt)$, ce qui montre que $\alpha = \frac{k}{2} du \wedge dt$ est holomorphe $\neq 0$ sur L_i . Ainsi α est une 2-forme holomorphe partout $\neq 0$ sur X , donc $K_X \equiv 0$. S'il existait une 1-forme holomorphe non nulle sur X , on en déduirait une 1-forme holomorphe $\neq 0$ sur A invariante par θ , ce qui est impossible : donc $q(X) = 0$ et X est une surface K3 .

La surface de Kummer X contient 16 droites rationnelles L_1, \dots, L_{16} , vérifiant $L_i \cdot L_j = 0$ pour $i \neq j$. Inversement :

Lemme 5. Soient X une surface K3, L_1, \dots, L_{16} 16 courbes lisses rationnelles telles que $L_i \cap L_j = \emptyset$ pour $i \neq j$. Supposons qu'il existe $l \in \text{Pic}(X)$ tel que $2l = \sum L_i$ dans $\text{Pic}(X)$. Alors X est une surface de Kummer.

Démonstration : Notons L le fibré en droites de classe l ; soit s une section du fibré $L^{\otimes 2}$ dont le diviseur des zéros est $\sum L_i$.

Posons : $\hat{A} = \{x \in L, x^{\otimes 2} = s\}$.

La projection de L sur X définit un revêtement double $\pi : \hat{A} \rightarrow X$, ramifié le long des L_i . On a $\pi^*L_i = 2E_i$, où E_i est une courbe rationnelle lisse; de plus :

$$4E_i^2 = (\pi^*L_i)^2 = 2L_i^2 = -4 \quad \text{d'où } E_i^2 = -1.$$

Le critère de contraction de Castelnuovo montre qu'il existe un morphisme birationnel $\varepsilon : \hat{A} \rightarrow A$ qui contracte les E_i . Prouvons que A est une surface

abélienne. On a :

$$K_A \equiv \varepsilon^* K_A + \sum E_i \equiv \pi^* K_X + \sum E_i, \quad \text{d'où } K_A \equiv 0.$$

Calculons $\chi(\sigma_A) = \chi(\sigma_A)$. On vérifie facilement que $\pi_* \sigma_A = \sigma_X \oplus L^{-1}$; par

suite $\chi(\sigma_A) = \chi(\sigma_X) + \chi(L^{-1}) = 4 + \frac{1}{2} l^2$ par Riemann-Roch.

Or $l^2 = \frac{1}{4} (\sum L_i)^2 = -8$; on a donc $\chi(\sigma_A) = 0$, d'où $q(A) = 2$.

La classification des surfaces (Théorème 18, 1ère partie) montre que A est une surface abélienne.

Notons σ l'involution qui échange les deux feuillets du revêtement ramifié π ; comme $\sigma(E_i) = E_i$, elle provient d'une involution θ de A. Soit

$a_i = \varepsilon(E_i)$ l'un des points fixes de θ ; θ opère sur l'espace tangent à A en

a_i par multiplication par -1 . On en déduit aussitôt que θ est l'involution

$a \mapsto -a$ de A, pour la structure de groupe de A pour laquelle a_i est l'origine.

Par suite, X est la surface de Kummer associée à A.

Lemme 6. Avec les notations précédentes, désignons par L_X le sous-groupe de $H^2(X, \mathbb{Z})$ engendré par les L_i . Le sous-groupe $\pi_* \varepsilon^* H^2(A, \mathbb{Z}) \subset H^2(X, \mathbb{Z})$ est l'orthogonal de L_X dans $H^2(X, \mathbb{Z})$.

Démonstration : Au cours de la démonstration, on notera pour abrégé

$H^i(T) = H^i(T, \mathbb{Z})$ pour toute variété T.

Il est immédiat que $\pi_* \varepsilon^* H^2(A) \subset (L_X)^\perp$; montrons l'inclusion contraire.

Soit $x \in (L_X)^\perp$; comme $\pi^* x$ est orthogonal aux E_i , il existe $a \in H^2(A)$ tel que

$\pi^* x = \varepsilon^* a$. Comme $x = \frac{1}{2} \pi_* \pi^* x$, il suffit de prouver que $a = 2a'$ pour un

$a' \in H^2(A)$; ou encore, par dualité de Poincaré, que (a, b) est pair pour tout

$b \in H^2(A)$.

Posons $A' = \hat{A} - \cup E_i$, $X' = \hat{X} - \cup L_i$; notons $\pi' : A' \rightarrow X'$ la restriction de π . Considérons le diagramme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{16} & \xrightarrow{(L_i)} & H^2(X) & \longrightarrow & H^2(X') & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow 2 & & \downarrow \pi^* & & \downarrow \pi'^* & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{16} & \xrightarrow{(E_i)} & H^2(\hat{A}) & \longrightarrow & H^2(A') & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

On va montrer plus bas que π'^* est surjectif; on en déduit que $H^2(\hat{A})$ est engendré par $\text{Im}(\pi^*)$ et les E_i . Posons $\varepsilon^* b = \pi^* y + \sum n_i E_i$, avec $y \in H^2(X)$, $n_i \in \mathbb{Z}$; on a :

$$(a, b) = (\varepsilon^* a, \varepsilon^* b) = (\varepsilon^* a, \pi^* y) = (\pi^* x, \pi^* y) = 2(x, y)$$

d'où le résultat.

Il reste à montrer que π'^* est surjectif. Puisque π' est un revêtement étale de degré 2, il existe une suite spectrale :

$$E_2^{pq} = H^p(\mathbb{Z}/(2), H^q(A')) \implies H^{p+q}(X').$$

Notons σ_q l'action de l'involution σ (restreinte à A') sur $H^q(A')$, et

$\varepsilon_p = (-1)^p \cdot \text{Id}_{H^q(A')}$. La théorie de la cohomologie des groupes finis donne :

$$E_2^{pq} = \text{Ker}(\sigma_q - \varepsilon_p) / \text{Im}(\sigma_q + \varepsilon_p) \text{ pour } p \neq 0.$$

Pour $q \leq 2$, la restriction $H^q(A) \rightarrow H^q(A')$ est un isomorphisme; par suite

$\sigma_q = \varepsilon_q$ pour $q \leq 2$. On en déduit en particulier $E_2^{2,1} = E_2^{3,0} = 0$; il en résulte que l'"edge-homomorphisme" $H^2(X') \rightarrow E_2^{0,2}$ de la suite spectrale est sur-

jectif. Mais cet homomorphisme n'est autre que π'^* ; ceci achève de démontrer le lemme.

le lemme .

Proposition 7. Soient X et X' deux surfaces de Kummer, $\Psi :$

$H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Z})$ un isomorphisme de structures de Hodge polarisées, tel que

$\varphi(L_X) = L_{X'}$. Alors X et X' sont isomorphes.

Démonstration : Notons A, A' les surfaces abéliennes associées à X, X' . Il est immédiat que $(\pi_* \varepsilon^* a \cdot \pi_* \varepsilon^* b) = 2(a \cdot b)$ pour $a, b \in H^2(A, \mathbb{Z})$; en particulier $\pi_* \varepsilon^*$ est injectif. Il résulte alors du lemme 6 que Ψ induit un isomorphisme ψ de $H^2(A, \mathbb{Z})$ sur $H^2(A', \mathbb{Z})$; respectant le cup-produit. Il est clair que ψ induit un isomorphisme de structures de Hodge; la proposition 3 montre alors que A et A' sont isomorphes. Elles sont par conséquent isomorphes comme variétés abéliennes, ce qui entraîne que X et X' sont isomorphes.

§3. Surfaces de Kummer spéciales.

On dit qu'une surface de Kummer associée à une surface abélienne A est spéciale si A est réductible, i.e. s'il existe une suite exacte de variétés abéliennes :

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow A \xrightarrow{p} E \longrightarrow 0$$

où E et E' sont des courbes elliptiques.

Notons R la courbe (rationnelle) quotient de E par l'involution $x \mapsto -x$; on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \hat{A} & \xrightarrow{\pi} & X \\ \downarrow p\varepsilon & & \downarrow q \\ E & \xrightarrow{u} & R \end{array}$$

On dira que la fibration $q : X \rightarrow R$ est une "fibration de Kummer" pour X . Il est clair que q est lisse en dehors des 4 points de ramification r_1, \dots, r_4 de u .

Proposition 8.

Soient e un point d'ordre 2 de E, a_1, \dots, a_4 les 4 points d'ordre 2 de A
tels que $p(a_i) = e$; on pose $r = u(e)$. On a :

$$q^* r = 2 F_r + L_1 + L_2 + L_3 + L_4$$

où F_r est une courbe rationnelle lisse et $F_r \cdot L_i = 1$ ($1 \leq i \leq 4$).

Démonstration : On a :

$$q^* r = \frac{1}{2} \pi_* \pi^* q^* r = \pi_* \epsilon^* p^* e = \pi_* \left(\hat{F}_e + \sum_{i=1}^4 E_i \right) ,$$

où \hat{F}_e est le transformé strict dans \hat{A} de la courbe elliptique $F_e = p^{-1}(e)$.

L'involution σ induit sur \hat{F}_e une involution du type $x \mapsto -x$; par suite,

$\pi_* \hat{F}_e = 2F_r$, où $F_r = \hat{F}_e / (\sigma)$ est isomorphe à \mathbb{P}^1 .

Corollaire 9.

Soient X (resp. X') une surface de Kummer spéciale, f (resp. f') la fibre
générique d'une fibration de Kummer. Soit Ψ un isomorphisme de $H^2(X, \mathbb{Z})$ sur
 $H^2(X', \mathbb{Z})$, induisant un isomorphisme des structures de Hodge polarisées, trans-
formant cycles effectifs en cycles effectifs, et tel que $\Psi(f) = f'$. Alors
X et X' sont isomorphes.

Démonstration : Compte tenu de la proposition 7, il suffit de prouver que

$\Psi(L_X) = L_{X'}$. On a $f = 2F_r + \sum_{i=1}^4 L_i$ dans $\text{Pic}(X)$, d'où $f' = 2\Psi(F_r) + \sum \Psi(L_i)$

dans $\text{Pic}(X')$. Comme les seules décompositions de f' en somme de diviseurs ef-

fectifs sont de la forme $f' = 2F_r + \sum L_j$, on en déduit que $\Psi(L_i) = L_j$, d'où

le résultat.

Pour $f \in \text{Pic}(X)$, on notera $\tilde{S}_X(f)$ le sous-groupe de $\text{Pic}(X)$ engendré par les éléments x tels que $x^2 = -2$, $x.f = 0$; si $f \in \tilde{S}_X(f)$, on pose $S_X(f) = \tilde{S}_X(f)/\mathbb{Z}.f$, et on le munit de la forme quadratique induite. Supposons que f soit la fibre d'une fibration $q: X \rightarrow \mathbb{P}^1$, à fibres connexes; soit x un élément de $\text{Pic}(X)$ tel que $x^2 = -2$ et $x.f = 0$. Le théorème de Riemann-Roch montre que l'une des classes x ou $-x$ contient un diviseur effectif, qui est nécessairement une somme de composantes des fibres de q . On en déduit que dans ce cas le module $\tilde{S}_X(f)$ est engendré par les composantes des fibres de q .

Notons par ailleurs D_4 le module \mathbb{Z}^4 muni du produit scalaire défini par:

$$\begin{aligned} e_0 \cdot e_i &= 1 & \text{pour } 1 \leq i \leq 3 \\ e_i^2 &= -2 & \text{pour } 0 \leq i \leq 3 \\ e_i \cdot e_j &= 0 & \text{pour } 1 \leq i < j \leq 3. \end{aligned}$$

Il résulte aussitôt de la proposition 8 que lorsque f est la fibre d'une fibration de Kummer, $S_X(f)$ est isomorphe comme module quadratique à $(D_4)^4$.

Proposition 10.

Soient X une surface K3, $q: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ un morphisme surjectif à fibres connexes, f la classe dans $\text{Pic}(X)$ d'une fibre de q . Supposons que $S_X(f) \cong (D_4)^4$; alors, X est une surface de Kummer spéciale, et q est une fibration de Kummer.

Démonstration : Il résulte aussitôt du lemme 19, 1ère partie, que la forme quadratique sur $S_X(f)$ est négative non dégénérée. Le module quadratique $S_X(f)$ se décompose donc de manière unique comme somme de sous-modules irréductibles; chacun de ces sous-modules est engendré par les composantes d'une fibre réductible.

Sous l'hypothèse de l'énoncé, on conclut que q admet quatre fibres ré-

ductibles, de type D_4 ; c'est à dire que chaque fibre réductible s'écrit :

$$F_k = 2F'_k + \sum_{i=1}^4 L_{4k+i} \quad k = 0, \dots, 3.$$

On obtient en particulier 16 courbes rationnelles lisses L_i , deux à deux sans point commun, et telles que $\sum L_i = -2(\sum F'_k) + 4f$. On déduit alors du lemme 5 que X est la surface de Kummer associée à une surface abélienne A .

Considérons le revêtement ramifié $\tilde{\pi} : \hat{A} \rightarrow X$, et posons $E'_0 = \pi^{-1}(F'_0)$. C'est un revêtement double de \mathbb{P}^1 ramifié en 4 points, donc une courbe elliptique, qui coupe transversalement les droites exceptionnelles E_1, \dots, E_4 . Par suite, $\varepsilon(E'_0) = E'$ est une courbe elliptique sur A ; en choisissant une origine convenable sur E' et A , on peut considérer E' comme une sous-variété abélienne de A . Notons E la courbe elliptique A/E' ; on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \hat{A} & \xrightarrow{\pi} & X \\ \downarrow \varepsilon & & \downarrow q \\ A & & \mathbb{P}^1 \\ \downarrow & \xrightarrow{r} & \\ E & & \end{array}$$

où r est un revêtement double, ramifié au-dessus des 4 points de \mathbb{P}^1 au-dessus desquels q n'est pas lisse. On en conclut que q est une fibration de Kummer pour X .

Lemme 11 .

Soit X une surface K3, et soit $f \in \text{Pic}(X)$ une classe primitive (i.e. $f = mf'$ pour m entier entraîne $m = \pm 1$), telle que $f^2 = 0$ et $(f, x) \geq 0$ pour tout diviseur effectif x . Alors f est la fibre d'un morphisme $q: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ à fibres connexes.

Démonstration : Comme $(f, h) \geq 0$ si h est la classe d'une section hyperplane,

$-f$ ne peut être la classe d'un diviseur effectif. Le théorème de Riemann-Roch montre alors que $h^0(f) \geq 2$. Écrivons $f \equiv Z+M$, où Z est fixe et M n'a pas de composantes fixes. L'argument du lemme 22, 1ère partie, montre que $Z^2=M^2=0$. On en déduit que $Z=0$ (sans quoi Z serait mobile par Riemann-Roch) et que $|M|$ est un pinceau sans points fixes. Il définit donc un morphisme $q : X \rightarrow \mathbb{P}^1$, qui se factorise (théorème de Bertini) en: $q : X \xrightarrow{p} C \xrightarrow{r} \mathbb{P}^1$, où p est à fibres connexes. Comme $q(X) = 0$, la courbe C est isomorphe à \mathbb{P}^1 . On a donc $f = d.f'$, où f' est la fibre de p et d le degré du morphisme r . Mais l'hypothèse entraîne $d=1$, d'où le résultat.

Théorème 12.

Soient X une surface de Kummer spéciale, X' une surface K3, $\Psi : H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Z})$ un isomorphisme de structures de Hodge polarisées, transformant cycles effectifs en cycles effectifs. Alors X et X' sont isomorphes.

Démonstration : Notons f la classe dans $\text{Pic}(X)$ de la fibre d'une fibration de Kummer; considérons l'élément $f' = \Psi(f) \in \text{Pic}(X')$. Il vérifie les hypothèses du lemme 11; il définit donc une fibration $q : X \rightarrow \mathbb{P}^1$, à fibres connexes, et on a $S_X(f') \cong (D_4)^4$. Il résulte alors de la proposition 10 que X' est une surface de Kummer spéciale et q une fibration de Kummer. On conclut avec le corollaire 9.

Remarque 13. Soient X, X' deux surfaces K3, $\Psi : \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(X')$ un isomorphisme respectant le cup-produit, h la classe dans $\text{Pic}(X)$ d'une section hyperplane de X . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) Ψ transforme les cycles effectifs en cycles effectifs;

b) $\mathcal{P}(h)$ est la classe d'un diviseur ample.

En effet, cela résulte facilement du fait que les classes de diviseurs effectifs sur X sont les sommes d'éléments $x \in \text{Pic}(X)$ tels que : $x^2 \geq -2$, $(x.h) \geq 0$.

Théorème 14.

Soient X (resp. X') une surface K3, h (resp. h') la classe d'une section hyperplane. On suppose qu'il existe un isomorphisme $\mathcal{P} : H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Z})$, induisant un isomorphisme des structures de Hodge polarisées, tel que $\mathcal{P}(h) = h'$. Alors, X et X' sont isomorphes.

Idée de la démonstration : On construit un espace analytique M_g , qui est un espace des modules grossier pour les surfaces K3 munies d'une "polarisation" h telle que $h^2 = 2g-2$. Pour cela, on considère le schéma de Hilbert qui paramètre les surfaces de degré $2g-2$ dans \mathbb{P}^g qui sont des surfaces K3, et on le divise par l'action des automorphismes de \mathbb{P}^g .

Soit d'autre part Γ un module quadratique isomorphe au H^2 d'une surface K3, η un élément de Γ tel que $\eta^2 = 2g-2$. On désigne par $G^\eta(\Gamma_{\mathbb{C}})$ la sous-variété de $G^0(\Gamma_{\mathbb{C}})$ (§1) formée des sous-espaces $H^{2,0}$ de $\Gamma_{\mathbb{C}}$ qui sont orthogonaux à η . Notons D le groupe (discrèt) des automorphismes de Γ qui fixent η et P l'espace analytique quotient $G^\eta(\Gamma_{\mathbb{C}})/D$. En choisissant arbitrairement, pour toute surface K3 polarisée (X, h) , un isomorphisme u de $H^2(X, \mathbb{Z})$ sur Γ tel que $u(h) = \eta$, et en transportant sur Γ la structure de Hodge de $H^2(X, \mathbb{Z})$ par cet isomorphisme, on obtient une application des périodes $p : M_g \rightarrow P$, qui est analytique.

L'énoncé du théorème signifie que p est injectif. Or, le théorème 12 (joint à la remarque 13) montre que $p^{-1}(p(x)) = \{x\}$ lorsque le point x de M_g

correspond à une surface de Kummer spéciale. On montre alors que l'ensemble des $p(x)$, où x correspond à une surface de Kummer spéciale, est dense dans P . L'injectivité de p en résulte aussitôt.

BIBLIOGRAPHIE

- [B] E. BOMBIERI : Canonical models of surfaces of general type.
Publ. Math. I.H.E.S. 42 (1973)
- [Be] A. BEAUVILLE : Surfaces algébriques complexes. A paraître dans
Astérisque.
- [Ch1] I.R. CHAFAREVITCH : Foundations of algebraic geometry. Springer-Verlag
- [Ch2] CHAFAREVITCH et al. : Algebraic surfaces. Proc. of Steklov inst. of
Math. n°75 (1965).
- [Ch-P] CHAFAREVITCH et PIATECHKI-CHAPIRO : A Torelli theorem for algebraic
surfaces of type K3. Math. USSR Izvestja . Vol.5
(1971), n°3.
- [G] A. GROTHENDIECK : Techniques de construction en géométrie analytique.
I-X Sémin. Cartan, t.13 (1960/61).
- [R] M. RAYNAUD : Familles de fibrés vectoriels sur une surface de
Riemann. Sémin. Bourbaki n°316 (1966/67).
- [T] R. TORELLI : "Sulle varietà di Jacobi" . Rendiconti della R. Acc.
dei Lincei, série 5^a, Vol.22 (1913).

Arnaud Beauville
Université d'Angers
Fac. des Sciences
Bd. Lavoisier
49045 - ANGERS Cédex