VARIETES RATIONNELLES ET UNIRATIONNELLES

A. BEAUVILLE

Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique
F 91128 Palaiseau Cedex - France

"Laboratoire Associé au C. N. R. S. No 169"

1. ÉNONCÉ DU PROBLÈME.

Le problème dont je veux parler est souvent appelé le problème de Lüroth. Il peut s'exprimer en termes algébriques (rappelons qu'une extension de $\mathbb{C}$ est dite pure si elle est $\mathbb{C}$-isomorphe au corps des fractions rationnelles sur $\mathbb{C}$ en un nombre fini d'indéterminées) :

Toute sous-extension d'une extension pure de $\mathbb{C}$ est-elle pure ?

Ce problème est en fait de nature géométrique. Introduisons deux définitions :

Définition : Soit X une variété algébrique complexe irréductible.

a) On dit que X est unirationnelle s'il existe une application rationnelle dominante (c'est-à-dire génériquement surjective) $f : \mathbb{P}^n \dashrightarrow X$.

b) On dit que X est rationnelle s'il existe une application birationnelle $f : \mathbb{P}^n \dashrightarrow X$.

Puisque toute extension de type fini de $\mathbb{C}$ est le corps des fonctions d'une variété algébrique, le problème de Lüroth admet la formulation géométrique suivante :

Toute variété unirationnelle est-elle rationnelle ?

Remarques : 1) Il est facile de voir que la restriction d'une application dominante $f : \mathbb{P}^n \dashrightarrow X$ à une sous-variété linéaire générale de $\mathbb{P}^n$, de dimension au moins égale à celle de X, est encore dominante. Dans la définition a), on peut donc supposer $n = \dim(X)$, ce que nous ferons désormais.

M568.0582

2) Il est clair que le problème ne dépend que de la classe d'équivalence birationnelle de la variété considérée : nous supposerons donc désormais que celle-ci est <u>lisse</u>.

2. LE PROBLÈME DE LÜROTH EN DIMENSION UN ET DEUX.

Lüroth a résolu affirmativement le problème en dimension un : toute courbe unirationnelle est rationnelle [L]. Sa démonstration est algébrique (alors qu'il donne l'énoncé sous forme géométrique). La démonstration géométrique est très facile : soit C une courbe unirationnelle, de sorte qu'il existe une application $f : \mathbb{P}^1 \to C$. L'espace $H^0(C,\Omega_C^1)$ est nul : en effet, si ω est une forme holomorphe sur C, la forme holomorphe $f^*\omega$ sur $\mathbb{P}^1$ est nulle, donc $\omega = 0$. Or toute courbe de genre nul est isomorphe à $\mathbb{P}^1$, d'où le résultat.

Le problème devient beaucoup plus difficile en dimension deux. Il a été résolu par Castelnuovo en 1894 [C] ; ce résultat constitue l'un des premiers succès de la géométrie birationnelle italienne. Soient S une surface lisse unirationnelle, et $f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow S$ une application dominante. On montre comme plus haut qu'on a $H^0(S,\Omega_S^1) = H^0(S,\Omega_S^2) = 0$ (noter que f est défini en dehors d'un nombre fini de points, ce qui permet de définir l'image inverse par f d'une forme holomorphe) ; plus généralement, on a $H^0(S,\Omega_S^1)^{\otimes k}) = 0$ pour tout k. Il reste à montrer que cette propriété entraîne que S est rationnelle, et c'est là le résultat essentiel de Castelnuovo :

<u>Théorème</u> : <u>Toute surface lisse</u> S <u>telle que</u> $H^0(S,\Omega_S^1) = H^0(S,(\Omega_S^2)^{\otimes 2}) = 0$ <u>est rationnelle</u>.

3. LE PROBLÈME DE LÜROTH EN DIMENSION TROIS.

Le problème se trouvait dès lors posé en dimension 3 ; Max Nœther avait d'ailleurs déjà observé que l'hypersurface cubique dans $\mathbb{P}^4$ est unirationnelle, et posé la question de sa rationalité. Mais c'est surtout le nom du mathématicien italien G. Fano qui reste attaché au problème de Lüroth en dimension 3. Dès 1908, Fano "prouve" l'irrationalité de la quartique de $\mathbb{P}^4$ et de l'intersection complète d'une quadrique et d'une cubique dans $\mathbb{P}^5$ [F1]. En 1912, Enriques démontre que cette dernière variété est unirationnelle [E], fournissant ainsi en principe un contre-exemple au problème de Lüroth. Malheureusement l'argument de Fano se heurte à des questions délicates sur les points-base des systèmes linéaires, auxquelles les techniques de l'époque ne permettent pas de répondre rigoureusement ; Fano doit faire (implicitement) des hypothèses de position générale, qui nous paraissent aujourd'hui injustifiables. Fano donne en 1915 une autre "démonstration" [F2], mais qui n'échappe pas aux mêmes critiques. Dans les années qui suivent, Fano étudie longuement les variétés de dimension 3 plongées dans $\mathbb{P}^n$ par leur système anticanonique (les deux variétés citées plus haut en constituent les premiers exemples). En 1947, il prétend démontrer que trois autres types de cette série sont irrationnels [F4] ; certaines de ces variétés étant birationnellement équivalentes à une hypersurface cubique de $\mathbb{P}^n$, il répondrait ainsi à la question de Nœther -malheureusement la démonstration n'est pas plus rigoureuse que les précédentes.

Il semble que les résultats de Fano aient été largement acceptés par ses contemporains (cf. par exemple [G]). Des réserves sont apparues plus tard : un exposé critique des travaux de Fano se trouve dans le livre de Roth [R]. Roth conclut qu'aucune des démonstrations de Fano n'est à l'abri de la critique. Il poursuit en exhibant, à son tour,un contre-exemple "rigoureux" au problème de Lüroth : il s'agit du "solide d'Enriques", obtenu en normalisant une sextique dans $\mathbb{P}^n$ astreinte à passer doublement par 6 plans, intersections deux à deux de 4 hyperplans en position générale. Roth démontre que cette variété est unirationnelle, puis que son groupe de Picard admet un élément de torsion, ou, ce qui revient au même, qu'elle n'est pas simplement connexe. Puisque le π_1 est un invariant birationnel, une telle variété est certainement irrationnelle. Malheureusement (pour Roth), Serre démontrait quelques années plus tard qu'une variété unirationnelle est toujours simplement connexe [Se] ! L'erreur de Roth provient de ce que le solide d'Enriques possède des singularités isolées en dehors des 6 plans doubles [Ty] .

Il a en fait fallu attendre 1970 pour que le problème de Lüroth soit résolu, et ce par 3 paires de mathématiciens, schématisés dans le diagramme suivant :

auteurs	exemple	méthode
Clemens-Griffiths	cubique dans $\mathbb{P}^4$	jacobienne intermédiaire
Iskovskikh-Manin	quartique dans $\mathbb{P}^4$	automorphismes birationnels
Artin-Mumford	spécial (cf. § 9)	torsion de $H^3(X,\mathbb{Z})$

Le problème de Lüroth est cependant loin d'être entièrement résolu. En effet, le diagramme ci-dessus montre que des variétés d'un type extrêmement simple (hypersurfaces de bas degré dans $\mathbb{P}^4$) sont unirationnelles et non rationnelles. Dès lors, la question se pose de disposer de critères permettant d'affirmer qu'une variété donnée est ou n'est pas rationnelle. Le but de cet exposé est de montrer que les méthodes 1 et 2 permettent dans une certaine mesure de répondre à cette question en dimension 3. Le problème est par contre entièrement ouvert en dimension ≥ 4 (cf. § 10).

4. LES CANDIDATS.

Il s'agit ici de décrire une classe assez générale de variétés lisses X parmi lesquelles figurent d'éventuels contre-exemples. Une condition nécessaire, d'après ce qui précède (§ 2),est que tous les espaces de tenseurs contravariants holomorphes soient nuls, c'est-à-dire

$$H^o(X,(\Omega_X^1)^{\otimes k}) = 0 \qquad \text{pour tout } k \geq 1 \quad .$$

Cette condition décrit une classe intéressante de variétés, mais certainement trop large pour qu'on puisse espérer une classification. Il est raisonnable, pour simplifier, d'ajouter la condition $b_2 = 1$ (équivalente à $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}$) . On obtient alors les variétés de Fano de première espèce, qui ont été classifiées par Iskovskikh [I 1,2]. Pour énoncer ses résultats, notons H_X le générateur ample de Pic(X) ; on a $K_X = -rH_X$, où r est un entier >0 qu'on appelle l'indice de X. On a alors

Théorème : Soit X une variété de Fano de première espèce, d'indice r.

(i) On a $r \leq 4$; si $r = 4$ (resp. $r = 3$), X est isomorphe à $\mathbb{P}^3$ (resp. à une quadrique lisse de $\mathbb{P}^4$).

(ii) Si $r = 2$, X est isomorphe à l'une des variétés lisses suivantes :

(A_1) hypersurface de degré 6 dans l'espace projectif quasi-homogène $\mathbb{P}(1,1,1,2,3)$;

(A_2) revêtement double de $\mathbb{P}^3$ ramifié le long d'une quartique ;

(A_3) cubique dans $\mathbb{P}^4$;

(A_4) intersection de deux quadriques dans $\mathbb{P}^5$;

(A_5) section linéaire (dans le plongement de Plücker) de la grassmannienne $G(2,5)$.

(iii) Si $r = 1$, X est isomorphe à l'une des variétés lisses suivantes :

(B_2) revêtement double de $\mathbb{P}^3$ ramifié le long d'une sextique ;

(B_4) quartique dans $\mathbb{P}^4$;

(B'_4) revêtement double d'une quadrique Q de $\mathbb{P}^4$, ramifié le long d'un diviseur découpé sur Q par une quartique de $\mathbb{P}^4$;

(B_6) intersection d'une quadrique et d'une cubique dans $\mathbb{P}^5$;

(B_8) intersection de trois quadriques dans $\mathbb{P}^6$;

(B_{10}) section quadratique de $G(2,5)$;

(B_{14}) section linéaire de $G(2,6)$;

(B_d) ($d = 12,16,18,22$) une variété de degré d dans $\mathbb{P}^{d/2+2}$.

Les résultats positifs sur la rationalité ou l'unirationalité de ces variétés sont classiques ; ils sont essentiellement dus à Fano :

Proposition : Toutes les variétés de Fano de 1ère espèce sont unirationnelles sauf (peut-être) les types A_1, B_2 et B_4.

Les variétés de type A_4, A_5 ; B_{12}, B_{16}, B_{18} sont rationnelles.

Certaines quartiques sont unirationnelles [Sg] ; on ignore tout quant à l'unirationalité de la quartique générique, ainsi que des variétés de type A_1 et B_2. Certaines variétés de type B_{22} sont rationnelles ; Iskovskikh affirme qu'elles le sont toutes, mais sa démonstration est incomplète.

Ces résultats se démontrent par des méthodes projectives classiques : par exemple, soit X une intersection de deux quadriques dans $\mathbb{P}^5$ (type A_4) ; la projection depuis une droite contenue dans X

définit une application birationnelle de X dans $\mathbb{P}^3$. Nous verrons plus loin (§ 6) une démonstration de l'unirationalité des types A_3 et B_8.

5. LA JACOBIENNE INTERMÉDIAIRE.

L'outil utilisé par Clemens-Griffiths [C-G] est la jacobienne intermédiaire. Je me bornerai à la définir dans un cas très particulier, celui d'une variété X de dimension 3 (lisse, projective) vérifiant $H^o(X,\Omega_X^3) = 0$. Dans ce cas la décomposition de Hodge de $H^3(X,\mathbb{C})$ s'écrit simplement

$$H^3(X,\mathbb{C}) = H^{2,1} \oplus H^{1,2} \quad ,$$

où $H^{2,1}$ et $H^{1,2}$ sont deux sous-espaces complexes conjugués de $H^3(X,\mathbb{C})$ (on considère $H^3(X,\mathbb{C})$ comme le complexifié de $H^3(X,\mathbb{R})$, ce qui le munit d'une conjugaison complexe). Cette propriété de conjugaison entraîne que la projection de $H^3(X,\mathbb{Z})$ dans $H^{1,2}$ est un réseau, de sorte que le quotient $H^{1,2}/H^3(X,\mathbb{Z})$ est un tore complexe J(X), appelé <u>jacobienne intermédiaire</u> de X. De plus, la forme $(\alpha,\beta) \mapsto -2i \int_X \bar{\alpha} \wedge \beta$ sur $H^{1,2}$ possède les propriétés suivantes :

- c'est une forme hermitienne positive séparante sur $H^{1,2}$;
- sa partie imaginaire induit sur $H^3(X,\mathbb{Z})$ le cup-produit, c'est-à-dire une forme alternée unimodulaire (à valeurs entières).

Elle définit par conséquent sur J(X) une <u>polarisation principale</u>, autrement dit un <u>diviseur thêta</u>, bien défini à translation près (cf. par exemple [M1]). La jacobienne intermédiaire est donc dans ce cas une <u>variété abélienne principalement polarisée</u>, et c'est toujours ainsi que nous la considérerons.

La construction précédente est strictement parallèle à celle de la jacobienne d'une courbe ; de fait la jacobienne intermédiaire joue, pour les variétés qui nous occupent, le même rôle fondamental que la jacobienne pour les courbes. Je me contenterai de mentionner ici d'une part qu'elle intervient dans l'étude des cycles de dimension un sur X, et d'autre part qu'on peut espérer qu'elle détermine la variété X (problème de Torelli). Mais son importance dans les questions de rationalité vient du résultat suivant ([C-G], cor. 3.26) :

Proposition : Si la variété X est rationnelle, J(X) est isomorphe à une jacobienne ou un produit de jacobiennes.

Par jacobienne on entend la jacobienne d'une courbe ; d'autre part il s'agit bien sûr d'un isomorphisme de variétés abéliennes polarisées.

Esquisse de démonstration : On vérifie d'abord, par un calcul cohomologique facile, que lorsqu'on éclate une courbe lisse B dans X, la jacobienne intermédiaire de la variété éclatée est le produit de J(X) et de J(B). Si X est rationnelle, il existe d'après Hironaka un diagramme

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "\varepsilon"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ \mathbb{P}^3 \arrow[rr, dashed] & & X \end{tikzcd}$$

où ε est composé d'un nombre fini d'éclatements de points ou de courbes lisses, et où π est un morphisme birationnel. D'après ce qui précède, J(R) est un produit de jacobiennes, et J(X) en est un facteur direct. Or une variété abélienne principalement polarisée se décompose de manière unique en produit de facteurs irréductibles, ces facteurs correspondant aux composantes irréductibles du diviseur thêta. La proposition résulte alors de ce que les jacobiennes sont irréductibles (leur diviseur thêta est irréductible par le théorème de Riemann).

Le problème de Lüroth rejoint ainsi un autre problème classique, le problème de Schottky : déterminer, parmi toutes les variétés abéliennes principalement polarisées, celles qui sont des jacobiennes. Notons que les premières dépendent de $\frac{1}{2}\,g(g+1)$-modules et les secondes de $3g-3$, de sorte que le problème est (hautement !) non trivial dès que $g \geq 4$. Parmi les propriétés géométriques des jacobiennes, une conséquence facile du théorème des singularités de Riemann fournit un critère commode :

- le lieu singulier du diviseur Θ d'une jacobienne est de codimension ≤ 4 dans la jacobienne.

Andreotti et Mayer ont prouvé que cette propriété n'est pas très loin de caractériser les jacobiennes, cf. [A-M].

On notera qu'un produit de variétés abéliennes a un diviseur réductible, qui a donc un lieu singulier de codimension 2. Pour prouver que la variété X n'est pas rationnelle, on cherchera donc à montrer que le diviseur Θ de J(X) est peu singulier. Il faut pour cela disposer d'une description déométrique de J(X). On est loin de savoir répondre à cette question en général, ne serait-ce que pour les variétés de Fano. Nous allons décrire maintenant une classe de variétés pour lesquelles une telle description existe.

6. FIBRÉS EN CONIQUES.

Définition : On dit que la variété X est fibrée en coniques s'il existe une surface rationnelle S et un morphisme $f : X \to S$ dont les fibres sont des coniques (éventuellement dégénérées).

Il est facile de voir que toute variété admettant une application rationnelle sur $\mathbb{P}^2$ dont la fibre générique est une courbe rationnelle (ou, en langage classique, une congruence rationnelle du 1er ordre de courbes rationnelles) est birationnellement équivalente à un fibré en coniques. On décrit donc ainsi une classe de variétés qui semblent "assez proches" d'être rationnelles.

Sous les hypothèses de la définition, on vérifie facilement qu'il existe une courbe $C \subset S$ telle que

- si $p \in S - C$, $f^{-1}(p)$ est une courbe rationnelle lisse ;
- si p est un point lisse de C, $f^{-1}(p)$ est réunion de 2 courbes rationnelles se coupant transversalement ;
- si p est un point singulier de C, $f^{-1}(p)$ est une droite double ; p est alors un point double ordinaire de C .

On dit que C est la courbe discriminante du fibré en coniques .

On ignore si tout fibré en coniques est unirationnel (cf. § 10). On a cependant le résultat suivant, dû à Enriques :

Proposition : Soit $f : X \to S$ un fibré en coniques, et soit $R \subset X$ une surface rationnelle telle que la restriction de f à R soit surjective, de degré d. Alors la variété X est unirationnelle ; plus précisément, il existe une application rationnelle dominante $\mathbb{P}^3 \dashrightarrow X$ de degré d.

Démonstration : Traitons d'abord le cas $d = 1$. Alors la fibre générique de f est une conique sur le corps $K = \mathbb{C}(x,y)$, qui admet un point rationnel sur K ; elle est donc K-isomorphe à $\mathbb{P}^1_K$ (par projection stéréographique !), ce qui entraîne que X est rationnelle. Le cas général s'en déduit par le changement de base $R \to S$.

Exemples : 1) La cubique de $\mathbb{P}^4$.

Soit X une cubique (lisse) dans $\mathbb{P}^4$, et soit X_ℓ la variété obtenue en éclatant une droite ℓ contenue dans X. La projection de centre ℓ définit un morphisme $f : X_\ell \to \mathbb{P}^2$, qui fait de X_ℓ un fibré en coniques. La courbe discriminante $C \subset \mathbb{P}^2$ est de degré 5.
Notons E le diviseur exceptionnel dans l'éclatement de ℓ ; la restriction de f à E est surjective, de degré 2. Ainsi X est unirationnelle.

2) L'intersection de 3 quadriques dans $\mathbb{P}^6$.

Soit X une variété de ce type. Notons Π le réseau de quadriques de $\mathbb{P}^6$ contenant X ; c'est un plan projectif. Choisissons une droite ℓ contenue dans X ; notons G_ℓ la variété (isomorphe à $\mathbb{P}^4$) des 2-plans de $\mathbb{P}^6$ contenant ℓ. Soit $Q_\ell(X)$ la sous-variété de $\Pi \times G_\ell$ formée des couples (q,π) tels que $\pi \subset q$. La projection $f : Q_\ell(X) \to \Pi$ fait de $Q_\ell(X)$ un fibré en coniques. On vérifie immédiatement que la sous-variété de G_ℓ formée des plans contenus dans une quadrique q est singulière si et seulement si q l'est, de sorte que la courbe C est l'ensemble des quadriques singulières de Π ; elle est définie par l'annulation d'un déterminant symétrique d'ordre 7, à coefficients linéaires, et par suite est de degré 7.

Notons X_ℓ la variété obtenue en éclatant ℓ dans X, et S la sous-variété de $\Pi \times X_\ell$ formée des couples (q,x) tels que $\langle \ell, x \rangle \subset q$ (on désigne par $\langle \ell, x \rangle$ le plan engendré par ℓ et x ; ce symbole a un sens pour tout $x \in X_\ell$). On a un diagramme

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "p_2"'] \arrow[dr, "a"] & \\ X_\ell & & Q_\ell(X) \end{tikzcd} \qquad \text{avec } a(q,x) = (q, \langle \ell, x \rangle) \quad .$$

Il est immédiat que p_2 et a sont des morphismes birationnels, de sorte que X est birationnellement équivalent au fibré en coniques $Q_\ell(X)$.

De nouveau le diviseur exceptionnel dans l'éclatement de ℓ se projette surjectivement sur Π (le degré est 4). Ainsi X est unirationnelle.

3) Autres exemples.

Les variétés de Fano de 1ère espèce ne sont pas des fibrés en coniques ; mais elles le deviennent par des spécialisations convenables si on leur permet d'acquérir des singularités. Citons par exemple (cf. [B1]) :

- le revêtement double de $\mathbb{P}^3$ ramifié le long d'une quartique, lorsque celle-ci admet au moins un point double ordinaire ;
- la quartique avec une droite double ;
- l'intersection dans $\mathbb{P}^5$ d'une quadrique et d'une cubique contenant un plan.

L'importance des fibrés en coniques pour les questions de rationalité vient du théorème suivant :

Théorème : Soit X un fibré en coniques sur $\mathbb{P}^2$. Si le degré de la courbe discriminante C est ≥ 6, J(X) n'est pas isomorphe à une jacobienne (ou un produit de jacobiennes). En particulier, la variété X n'est pas rationnelle.

La démonstration de ce théorème consiste d'abord à décrire géométriquement J(X). On observe que la courbe C est munie naturellement d'un revêtement double $\tilde{C} \to C$, correspondant aux deux composantes des coniques singulières $f^{-1}(p)$ pour $p \in C$. Mumford a prouvé que J(X) est isomorphe à la variété de Prym associée à $(\tilde{C}, C)$ (cf. [B1]) ; il a d'autre part montré que le lieu singulier du diviseur Θ d'une variété de Prym est de codimension ≥ 5 sauf pour un petit nombre d'exceptions ([M2], et [B2] pour le cas où C a des points doubles). Il reste à s'assurer qu'une courbe plane de degré au moins 6 ne rentre pas dans ces exceptions, ce qui est facile.

Corollaire : Les variétés de Fano de type A_3, B_8 et B_{14} sont irrationnelles.

Pour les types A_3 et B_8, cela résulte du théorème et des exemples 1 et 2 (je triche un peu pour la cubique, dont la courbe discriminante est de degré 5 ; une étude plus précise montre que le théorème s'étend à ce cas). Fano a montré qu'une variété de type B_{14} est birationnellement équivalente à une cubique de $\mathbb{P}^4$ [F3].

7. IRRATIONALITÉ GÉNÉRIQUE.

La méthode des jacobiennes intermédiaires permet de régler génériquement les cas encore en suspens :

Théorème [B1] : Une variété de Fano générique de type A_1, A_2, B_2, B_4, B'_4, B_6 ou B_{10} est irrationnelle.

De manière précise, il est clair que l'ensemble des variétés de chaque type considéré peut être paramétré par une variété irréductible T ; il existe une sous-variété Z de T, distincte de T, telle que les variétés paramétrées par $T-Z$ soient irrationnelles.

Nous allons montrer en fait que la jacobienne intermédiaire d'une variété de $T-Z$ n'est pas une jacobienne ou un produit de jacobiennes ; comme cette propriété est ouverte, il suffit de le prouver en un point de $T-Z$. La démonstration repose alors sur le lemme suivant :

Lemme : Soient S une courbe lisse, $X \to S$ une famille de variétés projectives de dimension trois, o un point de S. On suppose que :

- pour $s \neq o$, la fibre X_s est lisse, et $H^o(X_s, \Omega^3_{X_s}) = 0$;
- X_o n'a que des points doubles ordinaires ; si X'_o désigne la variété lisse obtenue en éclatant ces points doubles, $J(X'_o)$ n'est pas isomorphe à une jacobienne ou un produit de jacobiennes.

Alors il existe un ouvert non vide U de S tel que $J(X_u)$ ne soit pas une jacobienne (ou un produit de jacobiennes) pour tout $u \in U$.

Démonstration : Notons $\mathcal{A}_g$ l'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g (quotient du demi-espace de Siegel par le groupe modulaire), avec $g = \frac{1}{2} b_3(X_s)$. La famille $J(X_s)_{s\in S-o}$ définit une application classifiante $c : S - o \to \mathcal{A}_g$; l'hypothèse sur X entraîne que c se prolonge en $\bar{c} : S \to \bar{\mathcal{A}}_g$, où $\bar{\mathcal{A}}_g$ désigne la compactification de Satake de $\mathcal{A}_g$. On a ensemblistement

$$\overline{\mathcal{A}}_g = \mathcal{A}_g \cup \mathcal{A}_{g-1} \cup \cdots \cup \mathcal{A}_o \quad ,$$

et le point $\overline{c}(o)$ de $\overline{\mathcal{A}}_g$ est la classe de $J(X'_o)$ dans $\mathcal{A}_p \subset \overline{\mathcal{A}}_g$, avec $p = \dim J(X'_o) \leq g$. Soit d'autre part J_g l'ensemble des points de $\mathcal{A}_g$ correspondant aux jacobiennes et aux produits de jacobiennes ; il est fermé dans $\mathcal{A}_g$, et son adhérence dans $\overline{\mathcal{A}}_g$ est

$$\overline{J}_g = J_g \cup J_{g-1} \cup \cdots \cup J_o \quad .$$

Comme $\overline{c}(0) \notin \overline{J}_g$ par hypothèse, il existe un voisinage ouvert U de a dans S tel que $\overline{c}(U) \cap \overline{J}_g = \emptyset$, d'où le lemme.

Pour achever la démonstration du théorème, il reste à mettre en évidence, dans chaque cas, une déformation $X \to S$ possédant les propriétés du lemme, et telle que X'_o soit un fibré en coniques. Je me contenterai d'indiquer quelques exemples. Si l'on projette une intersection de 3 quadriques depuis une droite générale contenue dans la variété, on obtient une quartique X_o avec 17 points doubles ordinaires que l'on peut déformer en une quartique générique. En projetant de nouveau depuis un point double de X_o, on obtient le type B_2 ; en faisant acquérir à l'intersection de 3 quadriques un point double ordinaire et en projetant depuis ce point, le type B_6, etc.

<u>Remarque</u> : La méthode s'applique bien entendu à d'autres variétés que les variétés de Fano.

8. <u>LES TRAVAUX D'ISKOVSKIKH ET MANIN</u>.

Les résultats d'Iskovskikh et Manin sont les suivants :

<u>Théorème</u> : <u>Les variétés de Fano de type</u> B_2, B_4, B'_4, B_6 <u>sont irrationnelles</u>.

Les démonstrations reprennent les idées de Fano (essentiellement celles de [F2]) en les complétant. Elles sont longues et difficiles, et j'avoue ne pas avoir tout lu. Je vais me borner à indiquer les énoncés qui conduisent au théorème.

Pour une variété X de type B_2 ou B_4, Iskovskikh et Manin prouvent dans [I-M] (cf. aussi [I3]) :

- Toute application birationnelle de X dans une variété de Fano de 1ère espèce est un isomorphisme.

En particulier, le groupe des automorphismes birationnels de X est fini, et X n'est pas birationnellement équivalente à $\mathbb{P}^3$.

La situation est plus compliquée pour les types B_4' et B_6, car la variété X admet alors des automorphismes birationnels qui ne sont pas partout définis. La méthode d'Iskovskikh dans [I3] consiste à mettre en évidence certains de ces automorphismes ; notant B(X) le groupe qu'ils engendrent, il obtient l'énoncé suivant :

- Si $\chi : X \to V$ est une application birationnelle de X dans une variété de Fano de 1ère espèce, il existe $\psi \in B(X)$ tel que $\chi \circ \psi$ soit un isomorphisme.

Il en déduit en particulier l'irrationalité de X (prenant $V = \mathbb{P}^3$), ainsi que des renseignements profonds sur la structure du groupe des automorphismes birationnels de X.

Signalons pour terminer que ces méthodes s'appliquent avec succès aux fibrés en coniques :

Théorème [S] : Soit $X \to S$ un fibré en coniques, dont la courbe discriminante C vérifie $|4K_S + C| \neq \emptyset$. Alors tout automorphisme birationnel de X préserve la fibration, et X est irrationnel.

Pour $S = \mathbb{P}^2$, ce résultat est moins fort que le théorème du § 6 ; mais en éclatant des points dans $\mathbb{P}^2$, Sarkisov donne des exemples de fibrés en coniques X irrationnel avec $H^3(X,\mathbb{Z}) = 0$ (la courbe C est alors une courbe elliptique). Il n'est pas clair qu'il existe de tels exemples avec X unirationnel.

9. L'EXEMPLE D'ARTIN-MUMFORD.

La méthode de [Ar-M] sort un peu du cadre de cet exposé, puisqu'elle ne s'applique pas aux variétés de Fano ; elle a cependant l'avantage de fournir un critère d'irrationalité en toute dimension. Elle est basée sur le résultat suivant :

Proposition : Pour une variété projective lisse X, le sous-groupe de torsion de $H^3(X,\mathbb{Z})$ est un invariant birationnel.

La démonstration est analogue à celle de le proposition du § 5, mais plus facile.

Il s'agit donc de construire des variétés unirationnelles X pour lesquelles $H^3(X,\mathbb{Z})$ contienne des éléments de torsion. Voici une description géométrique de l'exemple d'Artin-Mumford. Soit Π un système linéaire de quadriques de $\mathbb{P}^3$, de dimension projective 3, vérifiant les conditions de position générale suivantes :

(i) Π n'a pas de point-base ;

(ii) si ℓ est une droite singulière pour une quadrique de Π, les autres quadriques de Π ne contiennent pas ℓ.

Notons G la grassmannienne des droites de $\mathbb{P}^3$; soit R la sous-variété de G formée des droites contenues dans un pinceau de quadriques de Π. On sait que R est une surface d'Enriques, appelée classiquement congruence de Reye (cf. [B3], p. 136). Posons

$$\hat{G} = \{(\ell,q) \in G \times \Pi \mid \ell \subset q\} \quad .$$

Il est immédiat que la projection $\hat{G} \to G$ n'est autre que l'éclatement de R dans G. Notons $f : \hat{G} \to \Pi$ la seconde projection ; pour $q \in \Pi$, la fibre $f^{-1}(q)$ s'identifie à l'ensemble des génératrices de q. L'application f se factorise donc en

$$f : \hat{G} \xrightarrow{g} X' \xrightarrow{\pi} \Pi \quad ,$$

où π est un revêtement double, ramifié le long de la quartique de Π correspondant aux quadriques singulières. Celle-ci a dix points doubles ordinaires $s_1,\dots,s_{10}$, correspondant aux quadriques de rang 2 de Π ; on a $\pi^{-1}(s_i) = \{p_i\}$, où p_i est un point double ordinaire de X'. On note X la variété (lisse) obtenue en éclatant les points $p_1,\dots,p_{10}$ dans X. On voit facilement que X est unirationnelle (cf. § 6, exemple 3).

<u>Proposition</u> : <u>Le groupe</u> $H^3(X,\mathbb{Z})$ <u>contient un élément d'ordre</u> 2 .

<u>Démonstration</u> : Nous noterons Q_i la diviseur exceptionnel de X au-dessus de p_i ; on pose $U = X' - \{p_1,\dots,p_{10}\}$ et $V = g^{-1}(U)$. Le morphisme $g : V \to U$ est une fibration en droites projectives, tandis que $P_i = g^{-1}(p_i)$ est la réunion de deux plans se coupant en un point. La cohomologie considérée dans ce qui suit est toujours à coefficients <u>entiers</u>.

a) Le groupe $H^4(G)$ contient un élément d'ordre 2 : il est en effet isomorphe à $H^4(G) \oplus H^2(R)$, et $c_1(R)$ est un élément d'ordre 2 dans $H^2(R)$.

b) Il en est de même de $H^4_c(V)$, à cause de la suite exacte

$$\bigoplus_i H^3(P_i) \longrightarrow H^4_c(V) \longrightarrow H^4(G) \longrightarrow \bigoplus_i H^4(P_i)$$

et des relations $H^3(P_i) = 0$, $H^4(P_i) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

c) Le groupe $H^2_c(U)$ est sans torsion ; en effet $H^2(X)$ est sans torsion puisque X est simplement connexe, et $H^2_c(U)$ est un sous-groupe de $H^2(X)$ puisque $H^1(Q_i) = 0$.

d) Le groupe $H^4_c(U)$ contient un élément d'ordre 2. En effet, la suite exacte de Gysin pour la fibration en sphères $g : V \to U$ s'écrit

$$H^1_c(U) \xrightarrow{e} H^4_c(U) \xrightarrow{g^*} H^4_c(V) \xrightarrow{g_*} H^2_c(V) \quad ,$$

où e désigne le cup-produit avec la classe d'Euler du fibré en sphères ; celle-ci est annulée par 2. Si $\mathrm{Im}(e) \neq 0$, l'assertion est claire ; sinon l'élément d'ordre 2 de $H^4_c(V)$ provient (d'après c)) d'un élément d'ordre 2 de $H^4_c(U)$.

e) Puisque $H^3(Q_i) = 0$, le groupe $H^4_c(U)$ est isomorphe à un sous-groupe de $H^4(X)$; celui-ci contient donc un élément d'ordre 2, et il en est de même de $H^3(X)$ par dualité de Poincaré et par la formule des coefficients universels.

<u>Remarques</u> : 1) Pour tout n, la variété $X \times \mathbb{P}^n$ est unirationnelle et non rationnelle (puisque $H^3(X \times \mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$ contient un élément d'ordre 2).

2) La variété V est une <u>variété de Severi-Brauer</u> au-dessus de U, ce qui signifie que la fibration $g : V \to U$ n'est pas la fibration projective associée à un fibré vectoriel : en effet dans

le cas contraire, V serait birationnellement équivalente à $X \times \mathbb{P}^1$, donc irrationnelle. Un argument formel montre que V s'étend en une variété de Severi-Brauer au-dessus de X.

10. PROBLÈMES OUVERTS.

1) Compléter les résultats pour les variétés de Fano.

Il est possible qu'une étude détaillée de chaque cas, dans le style de [C-G], fournisse la réponse. Il serait plus intéressant de comprendre la question suivante :

2) Toute déformation (lisse) d'une variété irrationnelle de dimension 3 est-elle irrationnelle ?

Notons qu'une spécialisation d'une variété rationnelle de dimension 3 est rationnelle [T].

3) Fano observe souvent que la série des variétés de Fano "s'approche de la rationalité" quand le degré croît. Il en est de même lorsqu'on impose un nombre croissant de points doubles à une variété donnée. Peut-on donner un sens précis à ces assertions expérimentales ?

4) Donner des critères en dimension > 3, applicables aux variétés usuelles. En particulier :

5) Prouver qu'une cubique générique de dimension 4 est irrationnelle. Il existe une famille de codimension un de cubiques de $\mathbb{P}^5$ qui sont rationnelles ; conjecturalement, la réponse à la question 2 devrait donc être négative en dimension 4.

6) Signalons un problème de Zariski :

Si $X \times \mathbb{P}^1$ est rationnelle, la variété X est-elle rationnelle ?

Elle est évidemment unirationnelle. Notons qu'on a construit au § 9 une variété irrationnelle X admettant une variété de Severi-Brauer ("forme tordue" de $X \times \mathbb{P}^1$) rationnelle.

7) On rencontre souvent dans les problèmes de modules des variétés du type V/G, où G est un groupe semi-simple complexe opérant linéairement sur l'espace vectoriel complexe V. Ces variétés sont-elles toutes rationnelles ? Si H est un sous-groupe fermé de G, l'espace homogène G/H est-il rationnel ?

L'espace des modules des courbes de genre g est unirationnel pour $g \leq 10$. Est-il rationnel ? J'ignore la réponse dès que $g \geq 3$.

Les problèmes d'unirationalité semblent à l'heure actuelle encore plus inaccessibles, vu l'absence totale de méthodes existantes. Voici trois questions classiques, qui sont d'ailleurs liées entre elles.

8) <u>Donner un exemple de variété</u> X <u>non unirationnelle</u>, <u>telle que</u> $H^o(X,(\Omega_X^1)^{\otimes k}) = 0$ <u>pour tout</u> k .

9) <u>Une quartique générique de</u> $\mathbb{P}^4$ <u>est-elle unirationnelle</u> ?

10) <u>Donner un exemple de fibré en coniques non unirationnel</u>.

Un candidat possible, suggéré par Enriques, est l'hypersurface de degré d dans $\mathbb{P}^4$ contenant une droite avec multiplicité (d-2), pour $d \geq 5$.

BIBLIOGRAPHIE

[A-M] A. ANDREOTTI et A. MAYER : On period relations for abelian integrals on algebraic curves, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 21 (1967), 189-238.

[Ar-M] M. ARTIN et D. MUMFORD : Some elementary examples of unirational varieties which are not rational, Proc. London Math. Soc. 25 (1972), 75-95.

[B1] A. BEAUVILLE : Variétés de Prym et jacobiennes intermédiaires, Ann. E.N.S. 10 (1977), 309-391.

[B2] A. BEAUVILLE : Prym varieties and the Schottky problem, Inventiones Math. 41 (1977), 149-196.

[B3] A. BEAUVILLE : Surfaces algébriques complexes, Astérisque n° 54, S.M.F. (1978).

[C3] G. CASTELNUOVO : Sulla razionalità delle involuzioni piane, Math. Annalen 44 (1894).

[C-G] H. CLEMENS et P. GRIFFITHS : The intermediate Jacobian of the cubic threefold, Ann. of Math. 95 (1972), 281-356.

[E] F. ENRIQUES : Sopra una involuzione non razionale dello spazio, Rend. Acc. Lincei, s. 5^a, 31 (1912), 81-83.

[F1] G. FANO : Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli, Atti Acc. Torino 43 (1908), 973-977.

[F2] G. FANO : Osservazioni sopra alcune varietà non razionali aventi tutti i generi nulli, Atti Acc. Torino 50 (1915), 1067-1072.

[F3] G. FANO : Sulle sezioni spaziali della varietà Grassmanniana delle rette dello spazio a cinque dimensioni, Rend. Acc. Lincei 11 (1930), 329-356.

[F4] G. FANO : Nuove ricerche sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche, Comm. Pont. Ac. Sci. (1947), 635-720.

[G] L. GODEAUX : Questions non résolues de géométrie algébrique, Hermann, Paris (1933).

[I1] V. ISKOVSKIKH : Fano threefolds I, Math. USSR Izvestia 11 (1977), 485-527.

[I2] V. ISKOVSKIKH : Fano threefolds II, Math. USSR Izvestia 12 (1978), 469-506.

[I3] V. ISKOVSKIKH : Birational automorphisms of three-dimensional algebraic varieties, J. Soviet Math. 13 (1980), 815-868.

[I-M] V. ISKOVSKIKH et J. MANIN : Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem, Math. USSR Sbornik (1971), 141-166.

[L] J. LÜROTH : Beweis eines Satzes über rationale Curven, Math. Annalen 9 (1876), 163-165.

[M1] D. MUMFORD : Abelian varieties, Oxford University Press (1970).

[M2] D. MUMFORD : Prym varieties I. Contributions to analysis, Academic Press, New York (1974).

[R] L. ROTH : Algebraic threefolds, Ergebnisse der Math. 6, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1955).

[S] V. SARKISOV : Birational automorphisms of conic bundles, Mat. USSR Izvestia 17 (1981), 177-202.

[Se] J.P. SERRE : On the fundamental group of a unirational variety, J. London Math. Soc. 34 (1959), 481-484.

[Sg] B. SEGRE : Variazione continua ed omotopia in geometria algebrica, Ann. Mat. Pura Appl. 50 (1960), 149-186.

[T] K. TIMMERSCHEIDT : On deformations of threedimensional rational manifolds, Math. Annalen 258 (1982), 267-275.

[Ty] J. TYRELL : The Enriques threefold, Proc. Cambridge Phil. Soc. 57 (1961), 897-898.