Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE5 - 1 - **Transformation d'Abel.**

Prologue

Rappeler la Tranformation d'Abel.

Exercice 1 (Théorème d'Abel)

Montrer que si $u_n = a_n v_n$ où a_n décroit vers 0 et v_n complexes tels que les sommes partielles de $\sum v_n$ soient bornées, alors $\sum u_n$ converge. (Indication : quel est le nom du théorème ?)

Exercice 2 (Produit de séries)

On définit le produit de convolution de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ par $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

1) Question de cours : Montrer que si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes alors $\sum w_n$ est absolument convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$. (Indication : notant les sommes partielles avec des lettres majuscules, comparer W_n, $U_n \cdot V_n$ et W_{2n}.)

2) Donner un exemple où $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, mais pas $\sum w_n$.

3) Théorème de Cauchy-Mertens : Montrer que si $\sum u_n$ CVA et $\sum v_n$ CV, alors $\sum w_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$. (Indication : Commencer par traiter le cas $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 0$ et remarquer que $W_n = \sum_{k=0}^{n} u_k V_{n-k}$.)

Exercice 3 (Théorème d'Abel non tangentiel)

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière telle que $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge. Pour $\alpha \in [0, \pi/2[$, on pose

$$D_\alpha = \{|z| < 1\,;\, z = 1 - \rho e^{i\theta},\, \theta \in [-\alpha, \alpha],\, \rho \in]0, \cos\alpha]\}.$$

1) Dessiner D_α. Préciser pourquoi est-ce que le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$ satisfait $R \geq 1$?

2) Montrer que $f(z) - S = (z-1)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n$ où $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. (Indication : quel est le nom du théorème ?)

3) Montrer que pour $z \in D_\alpha$, on a l'inégalité $\dfrac{|z-1|}{1-|z|} \leq \dfrac{2}{\cos\alpha}$.

4) En déduire que $\displaystyle\lim_{z\to 1,\, z\in D_\alpha} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 4 (Théorème d'Abel et produit de séries)

1) Quel est le cas particulier de l'exercice 3 pour les séries entières réelles ?

2) Avec les notations de l'exercice 2, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$ et $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$. Montrer que $f(x)g(x) = h(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$.

3) En utilisant le 1), montrer que si $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

Bibliographie : Gourdon, Pommellet