Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE5 - 10 - **Transformation de Laplace.**

Pour $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$, on définit (si l'intégrale existe) la transformée de Laplace de f en x par

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\, dt.$$

Exercice 1 [Cours](Transformée de Laplace de quelques fonctions)

Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes : $L(t \mapsto t^n)(x) = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$, $L(t \mapsto \cos(at))(x) = \dfrac{x}{x^2+a^2}$, $L(t \mapsto \sin(at))(x) = \dfrac{a}{x^2+a^2}$ et $L(t \mapsto e^{at})(x) = \dfrac{1}{x-a}$.

Exercice 2 [Cours] (Convergence et convergence absolue)

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $L(f)(x)$ est absolument convergente. Montrer que $L(f)(y)$ est absolument convergente pour tout $y > x$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $L(f)(x)$ est convergente. Montrer que $L(f)(y)$ est convergente pour tout $y > x$.

3) On note

$$C(f) = \{x \in \mathbb{R}\,;\, L(f)(x) \text{ converge.}\},$$
$$A(f) = \{x \in \mathbb{R}\,;\, L(f)(x) \text{ est absolument convergente.}\},$$

et $c(f)$ la borne inf de $C(f)$, $a(f)$ la borne inf de $A(f)$.
Montrer que $c(f) < a(f)$ est possible. (Utiliser la fonction $f(t) = e^{ie^{4t}}$.)

Exercice 3 [Cours] (Régularités)

1) On suppose que f est une fonction bornée de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'alors $L(f)$ est définie sur $]0, +\infty[$, que $L(f) \in C^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $L(f)^{(n)}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2) On suppose que $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge. Montrer qu'alors $L(f)$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et que $L(f)$ est continue en 0^+. (On pourra poser $F(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\, dt$ et faire une intégration par partie.)

Exercice 4 (Application à un calcul d'intégrale)

Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

Exercice 5 (Théorème de Tauber sur la transformée de Laplace)

On s'intéresse à la réciproque de la continuité de la question 2 de l'exercice 3. On suppose que $L(f)(x) \to \alpha$ quand $x \to 0^+$.

1) Montrer que l'on n'a pas nécessairement la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$.

2) On suppose que $f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t}\right)$. Montrer qu'alors $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

Exercice 6 (Convolution et transformée de Laplace)

Montrer que $L(f * g)(x) = L(f)(x)L(g)(x)$, pour $x > \max(a(f), a(g))$, où la convolution est définie par $f * g(x) = \displaystyle\int_0^x f(u)g(x-u)\, du$.

Exercice 7 (Injectivité)

On suppose que pour tout $x > 0$, $L(f)(x) = 0$. Montrer qu'alors $f = 0$.
(On pourra poser $h(u) = f(-\ln u)$ sur $]0, 1]$ et montrer que $\int_0^1 u^n (\int_1^u h)\, du = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et conclure en utilisant le théorème de Weierstrass).
Le théorème de Lerch dit de plus que comme f est continue sur $[0, +\infty[$, alors on peut définir la transformée de Laplace inverse (de façon unique) via $L^{-1}(L(f)) = f$.

Exercice 8 (Résolution d'une équation aux dérivées partielles)

On cherche à résoudre $\partial_x U = 2\partial_t U + U$ avec la condition initiale $U(0, x) = 6e^{-3x}$. En faisant une transformée de Laplace par rapport à la variable t : $u(y, x) = L(t \mapsto U(t, x))(y)$, montrer que l'on est ramené, à y fixé, à résoudre l'équation différentielle $\dfrac{du}{dx} - (2y + 1)u = -12e^{-3x}$. Conclure.

Exercice 9 (Equation de la chaleur)

Soit un solide représenté par $0 < x < 1$. Il est supposé en $t = 0$ à la température $3\sin(2\pi x)$. On le place en tout temps ultérieur à la température nulle en $x = 0$ et en $x = 1$. L'évolution de la température suit la loi $\partial_t U(t, x) = \partial^2_{xx} U(t, x)$. Déterminer $U(t, x)$.

Remarque 1 : On peut aussi à l'aide de la transformée de Laplace, résoudre des équations intégrales $f(t) = G(t) + \displaystyle\int_a^b K(u, t) f(u)\, du$ *(si a et b sont constantes, on parle d'équation de Fredholm, si a est constante et $b = t$, on parle d'équation de Volterra), des équations intégro-différentielles du style* $f''(t) = f(t) + \sin t + \displaystyle\int_0^t \cos(t-u) f(u)\, du$, *des équations aux différences* $f(t) - 4f(t-1) + 3f(t-2) = t$, *des équations différentielles aux différences* $f'(t) = f(t-1) + 2t$.

Exercice 10 [Dvlpt] (Problème Tautochrone)

Ce problème consiste à trouver la forme d'un fil, situé dans un plan vertical, sur lequel une perle enfilée glisse sans frottement de façon à ce que le temps mis pour atteindre le point le plus bas du fil soit indépendant de la position initiale de la perle.

1) On note $P(u, v)$ la position initiale de la perle, $O(0, 0)$ le point le plus bas et $Q(x, y)$ un point intermediaire. On note σ la longueur de l'arc OQ, $d\sigma/dt$ la vitesse instantannée de la perle en Q et T le temps pour aller de P à O. Comme la forme de la courbe est fixée, il existe une fonction $F(y)$ telle que $d\sigma = F(y)dy$. Montrer que ce problème se ramène à résoudre $\displaystyle\int_0^v \frac{F(y)}{(v-y)^{1/2}}\, dy = \sqrt{2g}\, T$ (équation intégrale de type d'Abel). (On pourra commencer, en utilisant la conservation de l'énergie, par montrer que $\frac{d\sigma}{dt} = -\sqrt{2g(v-y)}$.)

2) Résoudre l'équation intégrale d'Abel à l'aide de la transformée de Laplace. (On trouve que $F(y) = \dfrac{T\sqrt{2g}}{\pi} y^{-1/2}$.)

3) Conclure que la courbe obtenue est une cycloïde (rappel : une paramétrisation de la cycloïde est $x(t) = a(t + \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$).

Remarque 2 : La transformée de Laplace est utile dans plusieurs leçons. Bien sur, dans la leçon sur les intégrales à paramètres, mais aussi dans la leçon de calculs d'intégrales (ex 3 indispensable), dans une leçon d'exemples d'équations différentielles (ex du style de l'exo 8) et dans la leçon sur l'étude des courbes (Dvlpt, Problème Tautochrone).

Bibliographie :

- Leichtmann, Schauer, tome 3 (ex 7)
- Pommelet (ex 2, 3, 4 et 5)
- Spiegel, Transformée de Laplace (ex 1, 6, 8, 9, 10 et ex sur la rem 1)