Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE5 - 11 - **Fourier et EDP.**

Exercice 1 (Equation de la chaleur dans l'espace entier)

On considère l'équation de la chaleur, posée dans l'espace entier :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) &= \Delta_x u(t,x), \qquad (t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^d, \\ u(0,x) &= u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

d'inconnue $u(t,x)$ et de donnée initiale $u_0(x)$.

1) En calculant formellement avec la transformée de Fourier, "intuiter" une solution du problème.

2) On suppose que $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et on pose $u(t,x) := \mathcal{F}^{-1}\left(\xi \mapsto e^{-t|\xi|^2}\widehat{u_0}(\xi)\right)(x)$.

a) Montrer que $u(t,.) = K(t,.) \star u_0$, où $K(t,x) = (4\pi t)^{-d/2}e^{-|x|^2/4t}$ pour $t > 0$.

(On traitera d'abord le cas où $u_0 \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.)

b) Montrer que $u \in C^0\left([0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^d)\right)$.

c) Montrer que $u \in C^\infty\left(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^d\right)$ et que u est bien une solution du problème.

3) Soient deux données initiales u_0 et v_0 dans $L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. On note u et v les solutions respectives du problème obtenues à la question précédente.

a) Montrer qu'il existe $C_d > 0$ tel que

$$\|u(t,.) - v(t,.)\|_{L^2}^2 \leq C_d \, \|u_0 - v_0\|_{L^1}^2 \, t^{-d/2}.$$

b) On suppose en plus qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x|^m |u_0(x)| dx < \infty, \qquad \int_{\mathbb{R}^d} |x|^m |v_0(x)| dx < \infty,$$

et que les données initiales ont des moments en espace communs jusqu'à l'ordre $m-1$, c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}^d} x^\alpha u_0(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} x^\alpha v_0(x) dx, \qquad \alpha \in \mathbb{N}^d, \quad |\alpha| \leq m-1.$$

Montrer que l'on a alors

$$\|u(t,.) - v(t,.)\|_{L^2}^2 \leq C_d \; d_m(u_0,v_0)^2 \; t^{-(m+d/2)},$$

où

$$d_m(u_0,v_0) := \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \left(\frac{|\widehat{u_0}(\xi) - \widehat{v_0}(\xi)|}{|\xi|^m} \right) < \infty.$$

Exercice 2 (Equation de la chaleur en domaine borné : le cas $d = 1$)

On considère l'équation de la chaleur, posée sur un segment de longueur $L > 0$:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) &= \partial_{xx}^2 u(t,x), \qquad (t,x) \in]0,+\infty[\times]0,L[, \\ u(0,x) &= u_0(x), \qquad x \in [0,L], \\ u(t,0) &= 0, \qquad t \in [0,+\infty[, \\ u(t,L) &= 0, \qquad t \in [0,+\infty[. \end{cases}$$

d'inconnue $u(t,x)$, de donnée initiale $u_0(x)$, et avec données aux bords nulles (conditions de Dirichlet homogènes).

1) Chercher des solutions C^2 à variables séparées, c'est-à-dire des solutions de la forme

$$u(t,x) = f(t)g(x).$$

En trouve-t-on ?

2) On suppose que la donnée initiale $u_0 \in L^2(]0,L[)$. On cherche à construire une solution au problème à partir des fonctions calculées à la question précédente.

a) Montrer que par changement de variables, on peut se ramener au cas $L = \pi$, ce qu'on supposera par la suite.

b) En exploitant la linéarité de l'équation de la chaleur, "intuiter" une solution du problème.

c) On pose $u(t,x) := \sum_{n\geq 1} b_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$, où $b_n := \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_0(x)\sin(nx)dx$.

Montrer que $u \in C^\infty(]0,+\infty[\times[0,\pi]) \cap C^0([0,+\infty[, L^2(]0,\pi[))$, et que u est bien une solution du problème suivant :

$$(P) \qquad \begin{cases} \partial_t u(t,x) &= \partial^2_{xx} u(t,x), & (t,x) \in]0,+\infty[\times]0,\pi[, \\ u(0,x) &= u_0(x), & pp\ x \in]0,\pi[, \\ u(t,0) &= 0, & t \in [0,+\infty[, \\ u(t,\pi) &= 0, & t \in [0,+\infty[. \end{cases}$$

d) Montrer l'unicité de la solution u.

(On étudiera l'évolution de "l'énergie" $E(t) = \|u(t,.)\|^2_{L^2(]0,\pi[)}$ au cours du temps.)

3) On suppose maintenant que la donnée initiale $u_0 \in C^0([0,\pi]) \cap C^1(]0,\pi[)$.

a) La régularité de la solution construite en 2)(iii) s'améliore t-elle ?

b) Démontrer le "principe du maximum" suivant :

Soit $Q :=]0,+\infty[\times]0,L[$ et soit $u \in C^0(\overline{Q}) \cap C^2(Q)$ telle que $(\partial^2_{xx} - \partial_t)(u) \geq 0$ sur Q. Soit $T > 0$ et $K := [0,T]\times[0,L]$. Alors, $\sup_K u = \sup_{K\cap\partial Q} u$.

c) En déduire une autre preuve de l'unicité de la solution.

Références : Faraut, Zuily