Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE5 - 14 - **Détermination du Log, de la racine. Image ouverte. Inversion locale.**

Exercice 1 (Exponentielle complexe)

Lire le prologue du Rudin (p. 1-3) sur la fonction exp.

Exercice 2 (Autour du Théorème de l'application ouverte)

Une application de classe C^1 dont la différentielle en tout point est bijective est une application ouverte. Nous allons voir que dans le cas des fonctions holomorphes, l'hypothèse sur la différentielle n'est pas nécessaire.

Le Théorème de l'application ouverte s'écrit :
si $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert connexe, et si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, alors $f(\Omega)$ est ouvert ou réduit à un point.

Voyons quelques points de démonstrations et quelques conséquences.

1) Montrer que si f est holomorphe et non constant au voisinage de z_0, alors $f(z) - f(z_0) = \varphi(z)^m$ où φ est un difféomorphisme d'un voisinage de z_0 dans un voisinage de 0 et $m \in \mathbb{N}^*$.

2) Si $m \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'application $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $\pi(z) = z^m$ est ouverte *i.e.* si $\omega \subset \mathbb{C}$ est ouvert, $\pi(\omega)$ est ouvert. Si $a \in \omega$, on séparera le cas $a \neq 0$ et $a = 0$.

3) Montrer que si f est holomorphe et non constant sur un voisinage $\mathcal{U}_0$ de z_0, alors $f_{|\mathcal{U}_0}$ est ouverte.

4) Montrer que si f est holomorphe et injective sur $\mathcal{U}$, alors $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathcal{U}$.

5) Montrer que si f est holomorphe et injective sur $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{C}$, alors f est undifféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $f(\mathcal{U})$ (ouvert) et que f^{-1} est holomorphe sur $f(\mathcal{U})$.

Exercice 3 (Logarithmes complexes)

1) a) On définit pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ l'argument de z comme $\mathrm{Arg}(z) = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$. Vérifier que Arg est continue sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$. On définit la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ par $\log(z) = \ln(|z|)+i\,\mathrm{Arg}(z)$. Démontrer que log est continue, $\log = \ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et que $\exp(\log(z)) = z$ si $z \notin \mathbb{R}^-$, et $\log(\exp(z)) = z$ si $|\mathrm{Im}(z)| < \pi$. Justifier que $\log \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-)$ en utilisant l'Ex. 2 1).

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Vérifier que la formule $\log_\alpha(z) = \log(e^{i(\pi-\alpha)}z) - i(\pi - \alpha)$ définit une branche du logarithme $\log_\alpha \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus e^{i\alpha}\mathbb{R}^+)$. Pour quel α a-t-on $\log_\alpha = \log$? Justifier que log et $\log_\alpha$ coïncident sur un secteur angulaire. Cela n'est-il pas en contradiction avec le principe des zéros isolés ?

2) *Application à un calcul d'intégrale.* Soit l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}(1+t^2)}\,dt.$$

Vérifier l'existence de I. On considère la branche log du logarithme définie sur $\mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R}^-)$, et on pose $f(z) = \dfrac{\log(z)}{(1+z^2)\exp(\frac{1}{2}\log(z))}$. Vérifier que f est méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R}^-)$, avec un pôle, et on donnera le résidu. Pour $0 < \varepsilon < 1 < R$, on considère le contour orienté Γ_ε^R dans le demi-plan $\{\ \mathrm{Im} \geq 0\ \}$ constitué des segments $[-R, -\varepsilon]$ et $[\varepsilon, R]$, et des demi-cercles de centre 0 et de rayons ε et R (l'orientation étant naturelle). Appliquer la formule des résidus à f sur le contour Γ_ε^R. Justifier que les intégrales sur les deux arcs de cercle tendent vers 0 quand $\varepsilon \to 0$ et $R \to +\infty$ en majorant le module de la fonction intégrée. En déduire la valeur de I, ainsi que la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t^2)}$.

3) *Application à un autre calcul d'intégrale : la formule des compléments.*
Calculer, pour $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) \in]0,1[$ (on peut prendre $s \in]0,1[$ si on préfère),

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{s-1}}{1+u}\,du.$$

On utilisera le log défini sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, la fonction $f(z) = \dfrac{e^{(s-1)\log(z)}}{1+z}$ et pour $0 < \varepsilon < 1 < R$ le contour Γ_ε^R défini comme étant le “ Pac-Man ” définit comme suit. On pose $\theta_0 = \arcsin(\frac{\varepsilon}{R})$, de sorte que $Re^{i\theta_0} = R\cos(\theta_0) + i\varepsilon$, et on définit Γ_ε^R comme le segment $[i\varepsilon, R\cos(\theta_0) + i\varepsilon]$, puis l'arc de cercle $Re^{i\theta}$, $\theta_0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0$, puis le segment $[R\cos(\theta_0) - i\varepsilon, -i\varepsilon]$ et un autre arc de cercle $\varepsilon e^{i\theta}$, $-\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq -\frac{\pi}{2}$ (faire un dessin). Quand $\varepsilon \to 0$ et $R \to +\infty$, justifier que les intégrales sur les arcs de cercle tendent vers 0 et donner les limites des intégrales sur les deux segments. En déduire que $I = \dfrac{\pi}{\sin(\pi s)}$.

Pour le lien avec la fonction Γ et la formule des compléments, voir par exemple Schwartz (Méthodes mathématiques pour les Sciences Physiques, Hermann p 347 à 350).

Exercice 4 (Applications conformes)

1) Soit $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire et injective. On dit que A préserve les angles si pour tous u, $v \in \mathbb{C}^*$, l'angle entre $A(u)$ et $A(v)$ est le même qu'entre u et v.

a) Montrer que A préserve les angles ssi l'argument de $\dfrac{A(z)}{z}$ est indépendant de $z \neq 0$.

b) En notant α, $\beta \in \mathbb{C}$ tels que $A(z) = \alpha z + \beta \bar{z}$ pour $z \in \mathbb{C}$, montrer que A préserve les angles ssi $\beta = 0$, *i.e.* A est une similitude directe.

2) On dit qu'une fonction différentiable $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est *conforme* si pour tout $z \in \Omega$, $df_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ préserve les angles. Montrer alors que f est conforme si et seulement si f est holomorphe et f' ne s'annule pas.

Références : Cartan, Obj Agreg, Rudin, Tauvel