Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE5 - 15 - **Suites, séries et produits de fonctions holomorphes, méromorphes.**

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (Convergence uniforme de suites de fonctions holomorphes)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω. On suppose que cette suite converge uniformément sur tout compact inclu dans Ω vers une fonction f.

Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact inclu dans Ω vers $f^{(k)}$.

(On commencera par le montrer sur tous les disques fermés inclus dans Ω.)

Exercice 2 (Séries de fonctions méromorphes)

Soient u_n des fonctions méromorphes sur Ω. On va étendre la notion de convergence uniforme dans ce cas.
On dira que $\sum u_n(z)$ converge uniformément sur tout compact de Ω si pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un entier naturel n_0 tel que
i) Pour tout $n \geq n_0$, u_n n'a pas de pôle sur K,
ii) La série $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n(z)$ converge uniformément sur K.

1) Comment peux-t'on définir la somme d'une telle série et où ?

2) Montrer qu'alors la somme obtenue est méromorphe dans Ω et que pour tout entier $k \geq 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(z)$ converge uniformément sur tout compact inclu dans Ω et a pour somme $u^{(k)}$.

Exercice 3 (Notion de produit infini)

Soit une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On définit les produits partiels $P_0 = a_0$, $P_{n+1} = a_{n+1}P_n$. On dit que le produit infini $\prod a_n$ est convergent si la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie non nulle P. Ce nombre P s'appelle alors le produit de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $P = \prod_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Remarque : on peut démarrer le produit à 1, 2 ou n_0 quelconque.

1) Calculer $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

2) Montrer que si $\prod a_n$ converge, alors $a_n \to 1$ et $\displaystyle\prod_{n=n_0}^{+\infty} a_n = P_{n_0}\prod_{n=n_0+1}^{+\infty} a_n$.

3) S'il existe n_0 tel que $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \ln a_n$ converge, alors le produit infini $\prod a_n$ est convergent.

4) Soit une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est absolument convergent, alors le produit infini $\prod(1+u_n)$ est convergent. Dans ce cas, on dit que le produit infini $\prod(1+u_n)$ est absolument convergent.

Exercice 4 (Produits infinis de fonctions holomorphes)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω. On pose $f_n = 1 + u_n$ et $g_n = \prod_{k=0}^{n} f_k$. D'après ce qui précède, on peut définir la convergence simple (c'est-à-dire pour tout z) de $\prod_{n=0}^{+\infty} f_n(z) = f(z)$.

1) On suppose que pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un entier naturel n_0 tel que
i) Pour tout $n \geq n_0$, $\ln f_n(z)$ existe pour tout $z \in K$,
ii) La série $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \ln f_n(z)$ converge uniformément sur K.

Montrer qu'alors f est holomorphe sur Ω et que la série de fonctions méromorphes $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{f_n'}{f_n}$ converge uniformément sur tout compact de Ω vers $\displaystyle\frac{f'}{f}$.

2) Si la série $\sum u_n(z)$ converge normalement sur tout compact, on dit alors que le produit infini $\prod f_n(z)$ converge normalement sur tout compact. Montrer qu'alors le *i*) et le *ii*) sont vérifiées.

Exercice 5 (Factorisation de sin **et formule des compléments)**

1) Montrer que le produit $\displaystyle z \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$ définit une fonction entière. Montrer que $\displaystyle\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$

(On pourra utiliser la formule $\mathrm{cotan} z = \displaystyle\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{z + k\pi}\right)$ que l'on montrera dans la séance de développement sur les développements eulériens.)

2) On cherche à montrer que $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \displaystyle\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ pour $z \notin \mathbb{Z}$. (Pour cela, on partira de la formule $\displaystyle\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n^z n!}$.)

(Référence : Pabion)