Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE5 - 16 - **Développements Euleriens.**

Exercice 1

1) Montrer que la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ est uniformément convergente sur tout compact de l'ouvert $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et que sa somme $f(z)$ est holomorphe sur Ω.

2) Pour $z \in \Omega$, on pose $h(z) = f(z) - \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$. Montrer que h est la restriction à Ω d'une fonction holomorphe H sur $\mathbb{C}$ qui vérifie $H(z+1) = H(z)$. Calculer $\lim_{y\to\infty} H(x+iy)$ et en déduire que $H = 0$. En déduire

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$$

(pour quels z ?)

3) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

4) Etudier la convergence de $\frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$ et en déduire qu'il s'agit d'une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.

5) En calculant la dérivée de cette fonction, établir la relation

$$\frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{\pi}{\tan(\pi z)}.$$

Exercice 2

1) On pose $F(z) = \text{cotan}(z) - \frac{1}{z}$. Montrer que F a une fausse singularité en 0.

2) On pose $G(z) = \frac{F(z)}{z-u}$. Quels sont les pôles de G ? Calculez les résidus en ces pôles.

3) On pose $r_N = \pi/2 + N\pi$ et on note γ_N le carré orienté positivement centré en 0, dont les côtés sont parallèles aux axes et passant par le point $(0, r_N)$. Montrer que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_N} \frac{uF(z)}{z(z-u)}\, dz = F(u) - 2\sum_{k=1}^{N} \frac{u}{u^2 - k^2\pi^2}$$

pour $|u| < r_N$.

3) Montrer que $\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_N} \frac{uF(z)}{z(z-u)}\, dz$ tend vers 0 quand $N \to +\infty$.

4) Obtenir que

$$\text{cotan} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{z+k\pi}\right)$$

(pour quels z ?)

(Références : Cartan, Pabion, Rudin)