Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE5 - 17 - **Fonctions Gamma et Zeta.**

Exercice 1 (Prolongement de Γ)

Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$.

Rappelons que Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$, que pour $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et que $\ln \Gamma$ est convexe sur $]0, +\infty[$.

1) En utilisant $f_n(t) = \mathbb{1}_{]0,n[}(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$, montrer que $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} n^x \int_0^1 s^{x-1}(1-s)^n\, ds$ pour $x > 0$.

2) En déduire, pour $x > 0$, la formule d'Euler : $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

3) Posons $G(z) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n^z n!}$. Montrer que G est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

4) En déduire que Γ se prolonge en une fonction holomorphe $\tilde{\Gamma}$ sur $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$. La fonction $\tilde{\Gamma}$ a des pôles simples aux points $z = -n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 (Caractérisation de Γ)

Soit f une fonction de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ telle que $f(x+1) = xf(x)$, $f(1) = 1$ et telle que $\ln f$ est convexe. Nous allons montrer que $f = \Gamma$.

1) soit $x, y > 0$ et $0 \le t \le 1$. Posons $z = tx + (1-t)t$. Montrer que

$$z(z+1)\cdots(z+n)f(z) \le (x(x+1)\cdots(x+n))^t\ (y(y+1)\cdots(y+n))^{1-t}\, f(x)^t f(y)^{1-t}.$$

2) En déduire que

$$\frac{f(z)}{\Gamma(z)} \le \left(\frac{f(x)}{\Gamma(x)}\right)^t \left(\frac{f(y)}{\Gamma(y)}\right)^{1-t}.$$

3) Conclure.

Exercice 3 (Prolongement de ζ)

Pour $\mathcal{R}e(z) > 1$, on pose $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^z}$.

1) Montrer que ceci définit une fonction holomorphe sur l'ouvert donné.

2) On pose $\theta(t) = \sum_{\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$ pour $t > 0$. On rappelle qu'à l'aide de la formule sommatoire de Poisson, on a montré que $\theta(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\dfrac{1}{t}\right)$ pour $t > 0$. On pose $\tilde{\theta}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t}$ pour $t > 0$. Quelle relation fonctionnelle est obtenue pour $\tilde{\theta}$?

3) Faire le changement de variable $x = \pi n^2 y$ dans $\Gamma\left(\dfrac{z}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z/2-1}\, dx$. En déduire une autre expression pour $\zeta(z)$.

4) Utilisant $f_N(y) = \sum_{n=1}^{N} e^{-\pi n^2 y} y^{z/2-1}$ et le théorème de Lebesgue, obtenir que, pour $\mathcal{R}e(z) > 1$,
$\zeta(z) = \dfrac{\pi^{z/2}}{\Gamma(z/2)} \int_0^{+\infty} \tilde{\theta}(y) y^{z/2-1}\, dy.$

5) On pose $I = \int_0^1 \tilde{\theta}(y) y^{z/2-1}\, dy$. Montrer que $I = \int_1^{+\infty} \tilde{\theta}(y) y^{-z/2-1/2}\, dy + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$ et en déduire que $\zeta(z) = \frac{\pi^{z/2}}{2(z-1)\Gamma(z/2+1)} + \frac{\pi^{z/2}}{\Gamma(z/2)} \int_1^{+\infty} \tilde{\theta}(y)(y^{z/2-1} + y^{-z/2-1/2})\, dy$.

6) En utilisant le fait que $\frac{1}{\Gamma}$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$, en déduire que $z \mapsto \frac{\pi^{z/2}}{2(z-1)\Gamma(z/2+1)}$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

7) Montrer que $z \mapsto \int_1^{+\infty} \tilde{\theta}(y)(y^{z/2-1} + y^{-z/2-1/2})\, dy$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

8) Conclure qu'il existe un prolongement holomorphe à ζ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et que le prolongement est égal à $z \mapsto \frac{1}{z-1} + \eta(z)$ avec η holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Références : Chambert-Loir, Zuily