Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE5 - 2 - **Utilisation des séries entières.**

Exercice 1 [Dvlpt] (Calcul des sommes, d'intégrales et de suites)

1) Calculer $\sum \frac{z^{5n}}{(5n)!}$ en résolvant une équation différentielle linéaire. De même calculer $\sum \frac{1}{(3n)!}$.

2) Montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

3) Calculer $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x+\cdots+x^n)}{x}\,dx$. (On utilisera le développement en série entière de $\ln(1-u)$.)

4) On définit par récurrence la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k\, a_{n-k}$ avec $a_0 = a$.

a) On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Etablir un lien entre $f^2(z)$ et $f(z)$.

b) En déduire que $f(z) = \frac{1-\sqrt{1-4az}}{2z}$.

c) En utilisant un développement en série entière, conclure à la valeur des a_n.

5) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_{n+1} = u_n - v_n$ et $v_{n+1} = u_n - 2v_n$. Calculer la somme des séries entières $\sum u_n z^n$ et $\sum v_n z^n$. Comment en déduire la valeur des u_n et v_n ? Proposer une autre méthode pour calculer les termes des deux suites.

Exercice 2 (Autres applications classiques : Dénombrement et équations différentielles)

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche à calculer a_n le cardinal de l'ensemble $\{(u,v)\in\mathbb{N}^2\,;\,2u+3v=n\}$.

a) Montrer que $\sum a_n x^n$ s'obtient en effectuant le produit de deux séries entières simples.

b) Développer $\frac{1}{1-z^2}\frac{1}{1-z^3}$ en éléments simple et conclure.

2) On cherche à résoudre l'équation de Bessel $x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y = 0$.

On cherche une solution sous la forme $x^\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_0 \neq 0$.

a) Montrer que $[(n+\lambda)^2 - \nu^2]a_n + a_{n-2} = 0$ pour $n \geq 2$.

b) Dans le cas $\lambda = \nu$, calculer les a_n.

c) Traiter les autres cas de figure.

3) En utilisant la même méthode, résoudre $xy'' + 2y' + \omega^2 xy = 0$.

(Réponse : solutions engendrées par $x \mapsto \frac{\sin(\omega x)}{x}$ et $x \mapsto \frac{\cos(\omega x)}{x}$.)

4) On rappelle qu'une involution est une permutation s telle que $s^2 = Id$. On note I_n le nombre d'involution sur $\{1,\cdots,n\}$.

a) Montrer que $I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}$.

b) On pose $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{I_n}{n!}x^n$. Montrer que $f'(x) = 1 + x + f(x) + xf(x)$. Exprimer I_n en fonction des coefficients a_n du développement en série entière en 0 de $g(x) = e^{x+x^2/2}\int_0^x (1+u)e^{-u-u^2/2}\,du$.

Références : Leichtnam-Schauer, Precis Analyse, Pommellet, Francinou Analyse 2