Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE5 - 3 - **Espaces L^p.**

Exercice 1 (Inégalités de Hölder et de Minkowski)

On fixe un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$. Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on note

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \text{ mesurable},\ \|f\|_p < \infty\},$$

où $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$ pour $p < +\infty$, et $\|f\|_\infty = \inf\{C > 0,\ pp\, x \in \Omega,\ |f(x)| \leq C\}$, avec $\inf \emptyset = +\infty$.

On note $L^p(\Omega)$ l'ensemble quotient de $\mathcal{L}^p(\Omega)$ par la relation d'équivalence d'égalité presque partout (pour cette relation, $f \sim g$ si et seulement si $\{x \in \Omega,\ f(x) \neq g(x)\}$ est de mesure de Lebesgue nulle).

Montrer les résultats suivants.

Théorème, Inégalité de Hölder : Soient $p, q \in [1, +\infty]$ deux exposants conjugués (i.e. $1/p + 1/q = 1$). Alors, pour toutes fonctions mesurables f, $g : \Omega \to \mathbb{R}$, nous avons

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Théorème, Inégalité de Minkowski : Soit $p \in [1, +\infty]$ et $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$. Alors, $f + g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ et $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Corollaire : Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $(L^p(\Omega), \|\ \|_p)$ est un espace vectoriel normé.

Inégalité de Hölder généralisée : Soient $p_i \in [1, +\infty]$ des exposants avec $1 \leq i \leq k$ tels que $1/p = 1/p_1 + \cdots + 1/p_k \leq 1$. Alors, pour toutes fonctions $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, nous avons $f = f_1 \cdots f_k \in L^p(\Omega)$ et

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_k\|_{p_k}.$$

Exercice 2 (Complétude des espaces L^p)

1) Montrer le résultats suivant :

Théorème de Riesz-Fischer : Pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ et pour tout $p \in [1, +\infty]$, $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

2) Remarquer que la preuve du théorème précédent montre la réciproque partielle du théorème de Lebesgue suivante :

Si $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$, alors il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ qui converge pp vers f et il existe une fonction $h \in L^p(\Omega)$ telle que $pp\ x \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}$, on a $|f_{\varphi(n)}(x)| \leq h(x)$.

Exercice 3 (Inclusions et interpolation)

En général, il n'y a pas d'inclusion, mais citons deux exceptions notables :

1) Si l'espace Ω est de mesure finie, les espaces $L^p(\Omega)$ sont décroissants avec p, ie $p \geq q \Rightarrow L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$.

2) Le cas des "espaces discrets" $\ell^p(\mathbb{N}, \mu)$ (où μ est la mesure de comptage sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$) est à l'opposé : ils sont croissants avec p, ie $p \leq q \Rightarrow \ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$.

3) Montrer le phénomène d'interpolation des espaces L^p suivant :

Théorème, Inégalité d'interpolation : Soient $1 \leq p \leq q \leq \infty$ et $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$. Alors, pour tout $r \in [p, q]$, $f \in L^r(\Omega)$ et

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha\ \|f\|_q^{1-\alpha}, \qquad \text{où} \qquad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

4) Soit $f \in L^\infty([a, b])$. Montrer que $f \in L^p([a, b])$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$ et que $\|f\|_p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty$.

5) Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^{p_0}(\mathbb{R})$ avec $p_0 < +\infty$. Montrer que $f \in L^p([a,b])$ pour tout $p_0 \leq p \leq +\infty$ et que $\|f\|_p \underset{p \to +\infty}{\to} \|f\|_\infty$.

Exercice 4 (Inégalités de Young)

On cherche à montrer que si $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ avec $p, q, r \in [1, +\infty]$ et $\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, alors $f * g \in L^r(\Omega)$ et $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

1) Traiter le cas $p = 1$.

2) Traiter le cas $r = +\infty$.

3) Traiter les autres cas. (Penser à l'inégalité de Hölder généralisée.)

Exercice 5 (Continuité uniforme)

On reprend les notations de l'exercice précédent. Montrer que dans le cas $r = +\infty$, $f * g$ est uniformément continue. (On commencera par le cas où f est continue à support compact.)

Références : Brézis, Chambert-Loir, Rudin